Syracuse notes

Eric Figuéréo
Conflans-Sainte-Honorine,
France
eric.figuereo@free.fr

21 octobre 2016

Résumé

Because nothing is "useful" for the law of nature, the best thing to do is perhaps to tackle the most useless thing. So, here's some notes about the Collatz conjecture.

Table des matières

1 Introduction

1.1 Collatz function, Odd base, Norm, Derivation

Définition 1.1. Collatz function
On appelle fonction de Collatz la fonction f définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ pair,} \\ (3n+1)/2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 1.2. *Ob* - Odd base
Notons pour tout x impair **Ob(x)** la suite $(k_i)_{1 \leq i \leq r}$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $x = 1 + 2^{k_1}(1 + 2^{k_2}(...(1 + 2^{k_r})...))$. La suite est l'application à valeurs dans le vide si x vaut 1.
On note également $\mathring{x}$ l'ensemble $\{k_1, ..., k_r\}$ si $x > 1$ et on pose $\mathring{x} = \emptyset$ sinon.

Définition 1.3. A_r- Odd sets
Posons pour tout r>0,
$A_r := \{1 + 2^{k_1}(1 + 2^{k_2}(...(1 + 2^{k_r})...)) \,|\, k_1, .., k_r \in \mathbb{N}^*\}$ et $A_0 := \{1\}$.

Lemme 1.1. *Binary and Ob relationship*
Pour tous entier $r \geq 0$ et suite $\alpha_0, ..., \alpha_r$ tels que
$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_r$*, on a :*
$\sum_{i=0}^{r} 2^{\alpha_i} = 1 + 2^{\alpha_1 - \alpha_0}(1 + 2^{\alpha_2 - \alpha_1}(...(1 + 2^{\alpha_r - \alpha_{r-1}})...))$.

Démonstration. Montrons le par récurrence sur $r \geq 0$.
Pour $r = 0$, c'est immédiat.
Supposons à présent que c'est vraie au rang r et montrons le au rang $r+1$. Soit alors une suite d'entiers $\alpha_0, ..., \alpha_{r+1}$ tels que $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_{r+1}$.
On pose $\beta_i = \alpha_{i+1} - \alpha_1$ pour $0 \leq i \leq r$, on note que :

$$0 = \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < ... < \beta_r \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=0}^{r+1} 2^{\alpha_i} &= 1 + 2^{\alpha_1 - \alpha_0}(\textstyle\sum_{i=1}^{r+1} 2^{\alpha_i - \alpha_1}) \\
&= 1 + 2^{\alpha_1 - \alpha_0}(\textstyle\sum_{i=0}^{r} 2^{\alpha_{i+1} - \alpha_1}) \\
&= 1 + 2^{\alpha_1 - \alpha_0}(\textstyle\sum_{i=0}^{r} 2^{\beta_i}) && (\beta_i = \alpha_{i+1} - \alpha_1) \\
&= 1 + 2^{\alpha_1 - \alpha_0}(1 + 2^{\beta_1 - \beta_0}(...(1 + 2^{\beta_r - \beta_{r-1}})...)) \\
& && \text{(hypothèse de récurrence appliquée aux } \beta_i) \\
&= 1 + 2^{\alpha_1 - \alpha_0}(1 + 2^{\alpha_2 - \alpha_1}(...(1 + 2^{\alpha_{r+1} - \alpha_r})...)) && \text{(définition des } \beta_i)
\end{aligned}$$

Ce qui clôt la récurrence et achève la démonstration du lemme. □

Proposition 1.1. *Ob unicity of odd number*
Pour tout $x > 0$ impair, il existe un unique entier r et une unique suite $(k_1, \ldots, k_r)$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ tels que $x \in A_r$ et $x = 1 + 2^{k_1}(1 + 2^{k_2}(...(1 + 2^{k_r})...))$.

Démonstration. Soit x impair, alors il existe des entiers $r \geq 0$ et $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_r$ uniques tels que

$$x = 1 + \sum_{i=1}^{r} 2^{\alpha_i} \text{ avec } 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_r$$

caractérisant l'écriture en base 2 de x. D'après le lemme L1.1, on a :

$$x = 1 + 2^{\alpha_1 - \alpha_0}(1 + 2^{\alpha_2 - \alpha_1}(...(1 + 2^{\alpha_r - \alpha_{r-1}})...))$$

Il suffit donc de poser pour tout $i > 0$ $k_i := \alpha_i - \alpha_{i-1}$ pour conclure. □

Définition 1.4. E_n
Pour tout $n \geq 0$, on note E_n l'ensemble des entiers impairs x tels qu'il existe $r \geq 0$, $k_1, .., k_r \in \mathbb{N}^*$ tels que $Ob(x) = (k_i)_{1 \leq i \leq r}$ et $card\{i > 0 \,|\, k_i = 1\} = n$.

Remarque 1.2. ***Partition of odd natural numbers***
Les $(E_n)_{n \geq 0}$ et les $(A_r)_{r \geq 0}$ forment deux partitions des entiers impairs et pour tout x impair, $Ob(x)$ est bien défini (en utilisant la proposition P1.1).

Définition 1.5. σ **norm**
Soit σ la fonction définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\sigma(x) = \sum_{k \in Ob(y)} k \text{ tel qu'il existe } \alpha \text{ entier, y impair et } x = 2^\alpha y.$$

Proposition 1.2. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $2^\alpha \in 2\mathbb{N} + 1$ alors $\sigma(2^\alpha) = \lfloor \alpha \rfloor$.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $2^\alpha \in 2\mathbb{N} + 1$. Il existe donc une unique suite d'entiers $(k_0, ..., k_r)$ telle que $2^\alpha = 2^{k_0} + ... + 2^{k_r}$ avec $k_0 = 0$ puisque 2^α impair. D'après le lemme L1.1 : $2^\alpha = 1 + 2^{k_0 - 0}(1 + 2^{k_1 - k_0}(...(1 + 2^{k_r - k_{r-1}})...))$. On en déduit que $\sigma(2^\alpha) = k_r - 0 = k_r$.
De plus comme $2^\alpha = 2^{k_0} + ... + 2^{k_r}$, $\alpha \geq k_r$, d'où $\lfloor \alpha \rfloor \geq k_r$. Comme $2^{k_0} + ... + 2^{k_r}$ correspond à l'écriture en base de 2 de 2^α, $k_0 < k_1 < ... < k_r$ et par conséquent, $2^\alpha < 2^{k_r + 1}$. On en déduit $k_r + 1 > \alpha$ et $k_r + 1 > \lfloor \alpha \rfloor$.
On en conclut $\sigma(2^\alpha) = k_r = \lfloor \alpha \rfloor$. □

Définition 1.6. Odd function
Notons Odd, l'application par :

$$\begin{array}{cccc} Odd & : & \mathbb{N} & \rightarrow & 2\mathbb{N} + 1 \\ & & x & \mapsto & 2^{-max\{n \in \mathbb{N} | 2^n \text{ divise } x\}}.x \end{array}$$

Définition 1.7. Fast Collatz function $\bar{f}$
Notons $\bar{f}$ la fonction définie par $\bar{f} = Odd \circ f$.

Lemme 1.3. ***Z extension***
Soient $x \in \mathbb{Q}^{+*}$ et une suite $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ tels que $x = 1 + 2^{\alpha_1}(1 + 2^{\alpha_2}(...(1 + 2^{\alpha_r})...))$. Posons pour tous $i > 0$, $\beta_i = \sum_{j=0}^{j=i} \alpha_j$ (avec $\alpha_0 = 0$). Si pour tous $i > 0$, $\beta_i > 0$:

1. *$x = \sum_{j=0}^{j=r} 2^{\beta_i}$ et $x \in 2\mathbb{N} + 1$*
2. *$\sigma(x) = max(\{\beta_i | i \in [\![0, r]\!]\})$ si $card(\{\beta_i | i \in [\![0, r]\!]\}) = r + 1$*

Démonstration. Montrons la première égalité par récurrence sur r.
Pour $r = 1$, on a $x = 1+2^{\alpha_1}$. Supposons alors que $\alpha_1 = \sum_{j=1}^{j=1} \alpha_j > 0$, le résultat est alors immédiat. Supposons à présent l'hypothèse de récurrence vraie jusqu'au rang r et montrons la au rang $r+1$. Soient $x \in \mathbb{Q}^{+*}$ et $\alpha_1, ..., \alpha_{r+1} \in \mathbb{Z}$ tels que $x = 1 + 2^{\alpha_1}(1 + 2^{\alpha_2}(...(1 + 2^{\alpha_{r+1}})...))$. On a :

$$\begin{aligned} x &= 2^{\alpha_1} + 1 + 2^{\alpha_2+\alpha_1}(1 + 2^{\alpha_3}(...(1 + 2^{\alpha_{r+1}})...)) \\ &= 2^{\alpha_1} + \sum_{j=0}^{j=r} 2^{\sum_{i=0}^{i=j} \alpha_i{}'} \\ &\qquad\qquad (\text{ avec } \alpha_i{}' = \alpha_{i+1} \text{ pour } i \geq 2,\ \alpha_1{}' = \alpha_1 + \alpha_2 \text{ et } \alpha_0{}' = 0) \\ &= \sum_{j=0}^{j=r+1} 2^{\sum_{i=0}^{i=j} \alpha_i} \end{aligned}$$

Ceci termine donc la récurrence.
Comme pour tous $i > 0$, $\sum_{j=1}^{j=i} \alpha_j > 0$, on en déduit $x \in 2\mathbb{N} + 1$.
De plus si tous les β_i sont distincts, on en déduit que l'écriture ci-dessus est sa décomposition unique en puissance de 2. Par suite la plus grande des puissances correspond alors à $\sigma(x)$. □

Proposition 1.3. ***Simple Ob derivation***
Soient x impair et $(k_i)_{1\leq i\leq r}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telle que $x = 1 + 2^{k_1}(1 + 2^{k_2}(...(1 + 2^{k_r})...))$. Si pour tous $i > 0$, $\sum_{j=1}^{j=i} k_j > 0$, On a :

$$f(x) = 2(1 + 2^{k_1-2}(1 + 2^1(1 + 2^{k_2-1}(1 + 2(...(1 + 2^{k_r-1}(1 + 2))...)))))$$

Et si $Ob(x) = (k_1, ..., k_r)$ telle que $x \in E_0$ et $k_1 > 2$, on a :

$$\text{et } Ob(\bar{f}(x)) = (k_1 - 2, 1, k_2 - 1, 1, ..., k_r - 1, 1).$$

Démonstration. Si $r = 1$, on a $x = 1 + 2^{k_1}$ et comme x impair :

$$\begin{aligned} f(x) &= (4 + 2^{k_1+1} + 2^{k_1})/2 \\ &= 2(1 + 2^{k_1-2}(1 + 2)). \end{aligned}$$

Et si $k_1 > 2$, $x \in E_0$ et $Ob(\bar{f}(x)) = (k_1 - 2, 1)$.

Supposons à présent $r > 1$. D'après le lemme L1.3, $x = \sum_{j=0}^{j=r} 2^{\sum_{i=0}^{i=j} k_i}$ est impair (avec $k_0 = 0$). Soient $\alpha_0, ..., \alpha_r$ tels que pour tout $i > 0$, $\alpha_i = \sum_{j=0}^{j=i} k_j$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\textstyle\sum_{i=0}^{r} 2^{\alpha_i}) \\ &= (4 + \textstyle\sum_{i=1}^{r} 2^{\alpha_{i+1}} + \sum_{i=1}^{r} 2^{\alpha_i})/2 && (x \text{ impair}) \\ &= 2 + \textstyle\sum_{i=1}^{r} 2^{\alpha_i} + \sum_{i=1}^{r} 2^{\alpha_i-1} \\ &= 2 + \textstyle\sum_{i=1}^{2r} 2^{\beta_i} && (\text{avec } \beta_{2i} = \alpha_i \text{ et } \beta_{2i-1} = \alpha_i - 1) \\ &= 2 + 2^{\beta_1}(1 + 2^{\beta_2-\beta_1}(1 + 2^{\beta_3-\beta_2}(...(1 + 2^{\beta_{2r}-\beta_{2r-1}})...))) \\ &= 2(1 + 2^{\beta_1-1}(1 + 2^{\beta_2-\beta_1}(1 + 2^{\beta_3-\beta_2}(...(1 + 2^{\beta_{2r}-\beta_{2r-1}})...)))) \end{aligned}$$

Comme $\beta_{2i} - \beta_{2i-1} = \alpha_i - (\alpha_i - 1) = 1$,
$\beta_{2i-1} - \beta_{2(i-1)} = \alpha_i - 1 - \alpha_{i-1} = \sum_{j=0}^{j=i} k_j - (\sum_{j=0}^{j=i-1} k_j) - 1 = k_i - 1$:

$$f(x) = 2(1 + 2^{k_1-2}(1 + 2^1(1 + 2^{k_2-1}(1 + 2(...(1 + 2^{k_{r-1}}(1 + 2))...)))))$$

Si maintenant, $x \in E_0$ et $k_1 > 2$, on a :
$Ob(\bar{f}(x)) = (k_1 - 2, 1, k_2 - 1, 1, ..., k_r - 1, 1)$. □

1.2 Document's goal

Définition 1.8. Length of x $\boldsymbol{\lambda(x)}$
Notons pour $x \in \mathbb{N}$, λ la fonction sur $\mathbb{N}$ définie par $\lambda(x) = card(Ob(x))$.

Définition 1.9. Counting the ones of x $\boldsymbol{\gamma(x)}$
Notons pour tout entier x, γ la fonction à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie par $\gamma(x) = n$ où n est l'unique entier tel que $x \in E_n$.

Définition 1.10. Measuring x $\boldsymbol{\mu(x)}$
Notons pour tout entier x, μ l'application à valeurs dans $\mathbb{N}^3$ définie par $\mu(x) = (\sigma(x), \gamma(x), \lambda(x))$.

Remarque 1.4. ***Order of*** $\mathbb{N}^3$
Dans la suite on utilisera, sans mention explicite, l'ordre lexicographique naturel induit par $\mathbb{N}_\sigma \times \mathbb{N}_\gamma \times \mathbb{N}_\lambda$ *qu'on notera simplement* $<$.

Remarque 1.5. ***Equivalents to the Syracuse conjecture***
La ***Conjecture de Syracuse*** *est équivalente à :*

1. *pour tout x entier, il existe un t entier tel que* $\bar{f}^t(x) = 1$,
2. *pour tous* $n \geq 0$ *et* $x \in E_n$*, il existe t tel que* $\bar{f}^t(x) = 1$,
3. *pour tous* $n \geq 0$ *et* $x \in E_n$*, il existe t tel que* $\sigma(\bar{f}^t(x)) < \sigma(x)$ *si* $x \neq 1$.
4. *pour tous* $n \geq 0$ *et* $x \in E_n$*, il existe t tel que* $\mu(\bar{f}^t(x)) < \mu(x)$ *si* $x \neq 1$.

Le but de ce document est donc d'étudier la possibilité de démontrer l'hypothèse de récurrence H_n ***correspondant à la dernière équivalence de cette remarque.***

2 Tools

2.1 Words

Notation 2.1. words

1. Pour toute suite finie $(k_i)_{0 \leq i \leq n}$ d'éléments de $\mathbb{Z}$, on note $w(k_1, ..., k_n)$ le mot associé ;
2. On appelle longueur d'un mot $w(k_1, ..., k_n)$ l'application $| \bullet |$ définie par $|w(k_1, ..., k_n)| = n$;
3. W est définie par $W(x) := w(Ob(Odd(x)))$ pour tout entier $x > 0$;
4. On note e_w, le mot de longueur nulle ;
5. Si w est un mot tel que $w = w(k_1, ..., k_n)$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ alors φ est l'application définie par $\varphi(w) := 1 + 2^{k_1}(1 + 2^{k_2}(...(1 + 2^{k_n})...))$ à valeur dans $\mathbb{Q}^+$. On pose $\varphi(e_w) = 0$;

6. Si w est un mot à valeurs dans $\mathbb{Z}$ alors $\bar{\varphi}$ est l'application définie par $\bar{\varphi}(w) := 2^{\beta}(\varphi(w))$ telle que $\beta \in \mathbb{Z}$ et $\bar{\varphi}(w)$ impair ;
7. Si w est un mot à valeurs dans $\mathbb{Z}$ alors $\bar{w}$ est définie par $\bar{w} := W(\bar{\varphi}(w))$;
8. $\bullet$ sera l'opérateur de concaténation sur les mots ;
9. $\equiv$ la relation d'équivalence définie par $w_1 \equiv w_2 \Leftrightarrow \varphi(w_1) = \varphi(w_2)$;
10. Si $P \subseteq \mathbb{Z}$, on note $\Omega(P)$ l'ensemble des mots à valeurs dans P ;
11. Si $P \subseteq \mathbb{Z}$, on note $\Omega^*(P)$ l'ensemble $\Omega(P) \setminus \{e_w\}$;
12. Si $P \subseteq \mathbb{Z}$ on note $\widetilde{\Omega(P)}$ l'ensemble défini par :

$$\widetilde{\Omega(P)} = \{a \in \Omega(\mathbb{Z}) | \exists b \in \Omega(P), a \equiv b\}$$

Proposition 2.1. ***Dilution***
Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ et $d \in \Omega(\mathbb{Z})$ alors $w(\alpha, \beta, \gamma).d \equiv w(\alpha + \beta, -\beta, \beta + \gamma).d$.

Démonstration. Il suffit d'employer la définition de φ :

$$\begin{aligned} \varphi(w(\alpha, \beta, \gamma).d) &= 1 + 2^{\alpha}(1 + 2^{\beta}(1 + 2^{\gamma}(\varphi(d)))) && \text{(définition de } \varphi) \\ &= 1 + 2^{\alpha+\beta}(2^{-\beta} + 1 + 2^{\gamma}(\varphi(d))) \\ &= 1 + 2^{\alpha+\beta}(1 + 2^{-\beta}(1 + 2^{\beta+\gamma}(\varphi(d)))) \\ &= \varphi(w(\alpha + \beta, -\beta, \beta + \gamma).d) && \text{(définition de } \varphi) \end{aligned}$$

Par définition de $\equiv$ on a donc :

$$w(\alpha, \beta, \gamma).d \equiv w(\alpha + \beta, -\beta, \beta + \gamma).d$$

□

Proposition 2.2. ***Ones in mass***
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$w(\alpha, 0).w(1)^n.w(\beta) \equiv w(\alpha + n + 1, \beta - 1)$$

Et pour tous mot v à valeurs dans $\mathbb{Z}$:

$$w(\alpha, 0).w(1)^n.w(\beta).v \equiv w(\alpha + n + 1, \beta - 1).v \quad (H_n)$$

Démonstration. La première est bien sûr une conséquence de la seconde. Montrons (H_n) à l'aide d'une récurrence sur n.
Si $n = 0$:

$$\begin{aligned} \varphi(w(\alpha, 0).w(1)^0.w(\beta).v) &= \varphi(w(\alpha, 0).w(\beta).v) \\ &= 1 + 2^{\alpha}(1 + 2^{0}(1 + 2^{\beta}(\varphi(v)))) && \text{(définition de } \varphi) \\ &= 1 + 2^{\alpha+1}(1 + 2^{\beta-1}(\varphi(v))) \\ &= \varphi(w(\alpha + 0 + 1, \beta - 1).v) && \text{(définition de } \varphi) \end{aligned}$$

D'où le résultat pour $n = 0$.
Supposons à présent vraie l'hypothèse de récurrence jusqu'au rang n. Montrons la au rang $n+1$:

$$\begin{aligned} w(\alpha,0).w(1)^{n+1}.w(\beta).v &= w(\alpha,0).w(1)^{n}.w(1).w(\beta).v \\ &\equiv w(\alpha+n+1,1-1).(w(\beta).v) && (H_n) \\ &\equiv w(\alpha+n+1,0).w(1)^{0}.w(\beta).v \\ &\equiv w(\alpha+n+1+(0+1),\beta-1).v && (H_0) \\ &\equiv w(\alpha+(n+1)+1,\beta-1).v \end{aligned}$$

Ce qui termine la récurrence. □

Proposition 2.3. *Nous avons les propriétés suivantes :*

1. *Soit p un entier et soit $(\alpha_i)_{1\leq i\leq p}$ une suite dans $\mathbb{N}^*$ alors :* $\overline{w(\alpha_1,...,\alpha_p)} = w(\alpha_1,...,\alpha_p)$. *De plus pour tout mot v à valeurs dans $\mathbb{Z}$, $\overline{v} = \overline{\overline{v}}$.*
2. *Soient p et q deux entiers et soient $(\alpha_i)_{1\leq i\leq p}$ et $(\beta_i)_{1\leq i\leq q}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que $w(\alpha_1,...,\alpha_p) \equiv w(\beta_1,...,\beta_q)$ alors $p = q$ et $\alpha_i = \beta_i$ pour tous $1 \leq i \leq p$.*
3. *Soit v un mot à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ alors on a $\overline{v} = v$.*
4. *Soient v_1, w_1, v_2 et w_2 des mots à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ tels que :* $v_1 \cdot w_1 \equiv v_2 \cdot w_2$ *et* $|v_1| = |v_2|$ *ou* $|w_1| = |w_2|$ *alors* $v_1 = v_2$ *et* $w_1 = w_2$.
5. *Soient v_1, w et $w^{'}$ des mots à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Si $w \equiv w^{'}$, on a :*
$$v_1.w \equiv v_1.w^{'}$$
6. *Soient v_1, v_2 deux mots à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On a :*
$$v_1 \equiv v_2 \implies \overline{v_1} = \overline{v_2}$$
7. *Pour tout $x \in 2\mathbb{N}+1$, $x = \varphi((w \circ Ob)(x))$.*
8. *Pour tout $v \in \Omega(\mathbb{Z})$, $\overline{\varphi}(\overline{v}) = \overline{\varphi}(v)$.*
9. *Pour tout mot $v \in \Omega(\mathbb{Z})$, si $\varphi(v)$ impair alors $\varphi(v) = \overline{\varphi}(v) = \overline{\varphi}(\overline{v}) = \varphi(\overline{v})$.*
10. *Soient $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $v \in \Omega(\mathbb{N})$ tel que $v(1) > 0$ alors $\overline{w}(w(\alpha).v) = w(\alpha).\overline{v}$.*
11. *Soit $x \in 2\mathbb{N}+1$ alors :*
$$\text{Si } Ob(x) = (k_1,...,k_r) \quad W(x) = w(k_1,...,k_r)$$
$$x = \varphi(W(x)) = \overline{\varphi}(W(x))$$
12. *Soient $x, y \in \mathbb{N}^*$ alors $\sigma(\bar{\varphi}(W(x).W(y))) = \sigma(x) + \sigma(y)$.*
13. *Soit $x \in \mathbb{N}^*$, alors $W(\overline{f}(x)) = W(f(x))$.*
14. *Soient $k_1,...,k_r \in \mathbb{N}^*$ tels que $k_1 > 2$ alors :*
$$(W \circ f \circ \varphi)(w(k_1,...,k_r)) = \overline{w}(k_1-2,1,k_2-1,1,...,k_r-1,1)$$
15. *Soit $a \in \Omega(\mathbb{Z})$ tel que pour tous $j \in [\![1,|a|]\!]$, $\sum_{i=1}^{i=j} a(i) > 0$ alors il existe $b \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ tel que $a \equiv b$.*

Démonstration. Montrons les 15 points dans l'ordre d'apparition.

1. On a :

$$\begin{aligned}
\overline{w(\alpha_1,...,\alpha_p)} &= W(\bar{\varphi}(w(\alpha_1,...,\alpha_p))) && \text{(N2.1.7)}\\
&= w(Ob(\bar{\varphi}(w(\alpha_1,...,\alpha_p)))) && \text{(N2.1.3)}\\
&= w(Ob(2^{\beta}(1+2^{\alpha_1}(...(1+2^{\alpha_p})...)))) \\
& \qquad\qquad \text{(avec } \beta = 0 \text{ car les } \alpha_i \geq 1\text{, N2.1.6)}\\
&= w(Ob(1+2^{\alpha_1}(...(1+2^{\alpha_p})...))) && (\beta = 0)\\
&= w(\alpha_1,...,\alpha_p) && \text{(car les } \alpha_i \geq 1)
\end{aligned}$$

   L'autre point est alors évident.

2. Comme $w(\alpha_1,...,\alpha_p) \equiv w(\beta_1,...,\beta_q)$, on a $\varphi(w(\alpha_1,...,\alpha_p)) = \varphi(w(\beta_1,...,\beta_q))$.
   Comme de plus $\alpha_i \geq 1$ et $\beta_i \geq 1$ pour tous i, on en déduit d'après la proposition P1.1 que $p = q$ et $\alpha_i = \beta_i$ pour tous i.

3. Par définition il existe $\beta \in \mathbb{Z}$ tel que $\varphi(\overline{v}) = 2^{\beta}(\varphi(v))$ et $2^{\beta}(\varphi(v))$ impair. Comme v est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, $\varphi(v)$ est impair et $\beta = 0$. Par conséquent, $\overline{v} \equiv v$ et d'après le point précédent on a même l'égalité.

4. D'après le second point, (P2.3.2), on a $\overline{v_1 \cdot w_1} = \overline{v_2 \cdot w_2}$. On en déduit alors $v_1 \cdot w_1 = v_2 \cdot w_2$ et $|v_1| + |w_1| = |v_2| + |w_2|$. D'où le résultat.

5. Soient $\alpha_1,...,\alpha_r \in \mathbb{Z}$ tels que $v1 = w(\alpha_1,...,\alpha_r)$. On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(v_1.w) &= 1+2^{\alpha_1}(...(1+2^{\alpha_r}(\varphi(w)))...) && \text{(définition de } \varphi)\\
&= 1+2^{\alpha_1}(...(1+2^{\alpha_r}(\varphi(w^{'})))...) && (\varphi(w) = \varphi(w^{'}))\\
&= \varphi(v_1.w^{'}) && \text{(définition de } \varphi)
\end{aligned}$$

   D'où la relation $v_1.w \equiv v_1.w^{'}$.

6. Soient v_1, v_2 deux mots à valeurs dans $\mathbb{Z}$ tels que $v_1 \equiv v_2$. On a :

$$\begin{aligned}
\overline{v_1} &= W(\bar{\varphi}(v_1)) && \text{(N2.1.7)}\\
&= W(2^{\beta}.\varphi(v_1)) && \text{(N2.1.6 et } \beta \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 2^{\beta}.\varphi(v_1) = \overline{\varphi}(v_1) \text{ impair)}\\
&= W(2^{\beta}.\varphi(v_2)) && (v_1 \equiv v_2)\\
&= W(\bar{\varphi}(v_2)) && (2^{\beta}.\varphi(v_2) = 2^{\beta}.\varphi(v_1) \text{ impair})\\
&= \overline{v_2} && \text{(N2.1.7)}
\end{aligned}$$

7. Soit k_1, ..., k_r $\in \mathbb{N}^*$ tels que $x = 1 + 2^{k_1}(...(1+2^{k_r})...)$, autrement dit $Ob(x) = (k_1,...,k_r)$. On a :

$$\begin{aligned}
\varphi((w \circ Ob)(x)) &= \varphi(w(k_1,...,k_r))\\
&= 1+2^{k_1}(...(1+2^{k_r})...) && \text{(définition de } \varphi)\\
&= x && \text{(définition de } x)
\end{aligned}$$

8. Soit $v \in \Omega(\mathbb{Z})$, on a :

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi}(\overline{v}) &= \varphi(\overline{v}) && \text{(car } \varphi(\overline{v}) \text{ impair)}\\
&= \varphi(W(\overline{\varphi}(v))) && \text{(définition de } \overline{v}\text{)}\\
&= \varphi((w \circ Ob \circ Odd)(\overline{\varphi}(v))) && \text{(définition de } W\text{)}\\
&= Odd(\overline{\varphi}(v)) && \text{(P2.3.7 car } Odd(\overline{\varphi}(v)) \text{ impair)}\\
&= \overline{\varphi}(v) && (\overline{\varphi}(v) \text{ impair)}
\end{aligned}$$

9. Soit v un mot à valeurs dans $\mathbb{Z}$, si $\varphi(v)$ impair alors par définition de $\overline{\varphi}$ on a $\overline{\varphi}(v) = \varphi(v)$ et en particulier $\overline{\varphi}(\overline{v}) = \varphi(\overline{v})$. On termine en notant que d'après le point précédent, $\overline{\varphi}(\overline{v}) = \overline{\varphi}(v)$.
10. Soient $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $k_1, ..., k_r \in \mathbb{N}^*$ et $v \in \Omega(\mathbb{N})$ tels que $v(1) > 0$, $\overline{v} = w(k_1, ..., k_r)$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\overline{w}(w(\alpha).v) &= W(\overline{\varphi}(w(\alpha).v)) && \text{(définition de } \overline{w}\text{)}\\
&= W(\varphi(w(\alpha).v))\\
& \qquad \text{(P2.3.9 car } \varphi(w(\alpha).v) \text{ impair puisque } \alpha > 0 \text{ et } v \in \Omega(\mathbb{N}))\\
&= W(1 + 2^\alpha(\varphi(v))) && \text{(défnition de } \varphi\text{)}\\
&= W(1 + 2^\alpha(\varphi(\overline{v})))\\
& \qquad \text{(P2.3.9 car } \varphi(v) \text{ impair puisque } v(1) > 0 \text{ et } v \in \Omega(\mathbb{N}))\\
&= W(1 + 2^\alpha(1 + 2^{k_1}(...(1 + 2^{k_r})...))) && \text{(définition de } \varphi(\overline{v})\text{)}\\
&= (w \circ Ob)(Odd(1 + 2^\alpha(1 + 2^{k_1}(...(1 + 2^{k_r})...)))) && \text{(N2.1.3)}\\
&= w(\alpha, k_1, ..., k_r) && (\alpha, k_1, ...k_r > 0)\\
&= w(\alpha).\overline{v} && \text{(définition de } \overline{v}\text{)}
\end{aligned}$$

11. Soit $x \in 2\mathbb{N} + 1$ tel que $Ob(x) = (k_1, ..., k_r)$. On a :

$$\begin{aligned}
W(x) &= w(Ob(Odd(x))) && \text{(N2.1.3)}\\
&= w(Ob(x)) && (x \text{ impair})\\
&= w(k_1, ..., k_r) && \text{(définition de } k_1, ..., k_r\text{)}
\end{aligned}$$

Ce qui montre le premier point.
De plus par définition de φ, on en déduit :

$$\varphi(W(x)) = 1 + 2^{k_1}(...(1 + 2^{k_r})...) = x$$

Ce qui signifie que $\varphi(W(x))$ impair et, d'après (P2.3.9), on en déduit $\overline{\varphi}(W(x)) = \varphi(W(x))$. Ce qui clôt la démonstration.
12. Soient $x, y \in \mathbb{N}^*$. Par définition de W, $W(x) = W(Odd(x))$, même chose pour y. Posons alors $Ob(Odd(x)) = (\alpha_1, ..., \alpha_p)$ et $Ob(Odd(y)) = (\beta_1, ..., \beta_q)$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\sigma(\bar{\varphi}(W(x).W(y))) &= \sigma(\bar{\varphi}(W(Odd(x)).W(Odd(y))))\\
&= \sigma(\bar{\varphi}(w(\alpha_1, ..., \alpha_p).w(\beta_1, ..., \beta_q))) && \text{(P2.3.11)}\\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{i=p} \alpha_i + \sum_{i=1}^{i=q} \beta_i && \text{(les } \alpha_i > 0 \text{ et } \beta_i > 0)\\
&= \sigma(Odd(x)) + \sigma(Odd(y)) && \text{(définition des } \alpha_i,\ \beta_i)\\
&= \sigma(x) + \sigma(y) && \text{(définition de } \sigma)
\end{aligned}$$

13. Soit $x \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} W(\overline{f}(x)) &= (w \circ Ob \circ Odd)(\overline{f}(x)) && \text{(définition de } W) \\ &= (w \circ Ob \circ Odd \circ Odd)(f(x)) && \text{(définition de } \overline{f}) \\ &= (w \circ Ob \circ Odd)(f(x)) && (Odd^n = Odd) \\ &= W(f(x)) && \text{(définition de } W) \end{aligned}$$

14. Soient $k_1, ..., k_r \in \mathbb{N}^*$ tels que $k_1 > 2$ et soit $x \in 2\mathbb{N}+1$ tel que $Ob(x) = (k_1, ..., k_r)$. On a d'après la proposition P1.3 :

$$(f \circ \varphi)(w(Ob(x))) = 2(1+2^{k_1-2}(1+2(1+2^{k_2-1}(...(1+2^{k_r-1}(1+2))...))))$$

D'où :

$$\begin{aligned} (f \circ \varphi)(w(k_1, ..., k_r)) &= 2^1\varphi(w(k_1-2, 1, k_2-1, 1, ..., k_r-1, 1)) \\ &= 2^1\varphi(\overline{w}(k_1-2, 1, k_2-1, 1, ..., k_r-1, 1)) \\ &\qquad \text{(P2.3.1 car } k_1 > 2 \text{ et } k_1, ..., k_r \in \mathbb{N}^*) \\ &= 2^1\overline{\varphi}(w(k_1-2, 1, k_2-1, 1, ..., k_r-1, 1)) \quad \text{(P2.3.9)} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} (W \circ f \circ \varphi)(w(k_1, ..., k_r)) &= w(Ob(Odd(2^1\overline{\varphi}[w(k_1-2, 1).\textstyle\prod_{i=2}^{i=r} w(k_i, 1)]))) \\ &= (W \circ \overline{\varphi})(w(k_1-2, 1).\textstyle\prod_{i=2}^{i=r} w(k_i, 1)) \\ &\qquad \text{(définition de } W) \\ &= \overline{w}(w(k_1-2, 1).\textstyle\prod_{i=2}^{i=r} w(k_i, 1)) \\ &\qquad \text{(définition de } \overline{w}) \end{aligned}$$

15. Soit $a \in \Omega(\mathbb{Z})$. Posons pour tous $j \in [\![1, |a|]\!]$, $\beta_j = \sum_{i=1}^{i=j} a(i) > 0$ et $\beta_0 = 0$. D'après (L1.3), $\varphi(a) = \sum_{j=0}^{j=r} 2^{\beta_j} \in 2\mathbb{N}+1$ dons d'après (P2.3.11), $\varphi(W(\varphi(a))) = \varphi(a)$ et donc $a \equiv W(\varphi(a))$. On pose $b = W(\varphi(a))$.

□

Proposition 2.4. ***Large dilution***
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, $c, d \in \Omega(\mathbb{Z})$, $r = |c| \geq 1$ et soient $c_1, \ldots, c_r$ tels que $c = \prod_{i=1}^{i=r} w(c_i)$. Alors pour tous $n \in [\![1, r]\!]$:

$$w(\alpha, \beta).c.d \equiv w(\alpha+\beta).(\prod_{i=1}^{i=n-1} w(c_i)).w(-\beta - \sum_{i=1}^{n-1} c_i, \beta + \sum_{i=1}^{i=n} c_i).(\prod_{i=n+1}^{i=r} w(c_i)).d$$

Note : lorsque la borne inférieure est strictement supérieure à la borne supérieure dans les accumulations ci-dessus, l'accumulation est réduite à son élément neutre.

Démonstration. Notons (P_n) la propriété à montrer et procédons par récurrence. Posons pour tous $p, q \in [\![1, r]\!]$, $\Gamma_p^q = \prod_{i=p}^{i=q} w(c_i)$ et $S_p^q = \sum_{i=p}^{i=q} w(c_i)$. La propriété (P_n) s'écrit alors :

$$w(\alpha, \beta).c.d \equiv w(\alpha+\beta).\Gamma_1^{n-1}.w(-\beta - S_1^{n-1}, \beta + S_1^n).\Gamma_{n+1}^r.d.$$

Pour $n = 1$, nous avons :

$$\begin{aligned} w(\alpha,\beta).c.d &= w(\alpha,\beta,c_1).\Gamma_2^r.d && \text{(car } r \geq 1) \\ &\equiv w(\alpha+\beta,-\beta,\beta+c_1).\Gamma_2^r.d && \text{(P2.1)} \\ &\equiv w(\alpha+\beta).\Gamma_1^0.w(-\beta-S_1^0,\beta+S_1^1).\Gamma_2^r.d \end{aligned}$$

Ce qui prouve P_1. Supposons alors l'hypothèse de récurrence vraie au rang n et montrons qu'elle le reste au rang $n+1 \leq r$. Nous avons :

$$\begin{aligned} w(\alpha,\beta).c.d &\equiv w(\alpha+\beta).\Gamma_1^{n-1}.w(-\beta-S_1^{n-1},\beta+S_1^n).\Gamma_{n+1}^r.d && (P_n) \\ &\equiv w(\alpha+\beta).\Gamma_1^{n-1}.w(-\beta-S_1^{n-1},\beta+S_1^n,c_{n+1}).\Gamma_{n+2}^r.d \\ & && \text{(car } n+1 \leq r) \\ &\equiv w(\alpha+\beta).\Gamma_1^{n-1}.w(-S_1^{n-1}+S_1^n,-\beta-S_1^n,\beta+S_1^n+c_{n+1}).\Gamma_{n+2}^r.d \\ & && \text{(P2.1 et P2.3.5)} \\ &\equiv w(\alpha+\beta).\Gamma_1^{n-1}.w(c_n,-\beta-S_1^n,\beta+S_1^{n+1}).\Gamma_{n+2}^r.d \\ &\equiv w(\alpha+\beta).\Gamma_1^n.w(-\beta-S_1^n,\beta+S_1^{n+1}).\Gamma_{n+2}^r.d \end{aligned}$$

Ce qui termine la récurrence et la preuve. □

Notation 2.2. $\varepsilon(v)$ - Word radix
Soit $v \in \Omega(\mathbb{Z})$, posons $U_v = \{i | v(i) = 0\}$, on note ε l'application définie par :

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon & : & \Omega(\mathbb{N}) & \to & \{0,1\} \\ & & v & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } U_v \neq \emptyset \text{ et } \forall\ i > max(U_v)\ v(i) = 1\,; \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Proposition 2.5. ***Zero ending***
Soient $a, b \in \Omega(\mathbb{N}^*)$, $r = |b| > 0$ tels qu'il existe $b_1, \ldots, b_r \in \mathbb{N}^*$. Alors on a :

1. $(\prod_{i=1}^{i=r} w(b_i)).w(0) \equiv (\prod_{i=1}^{i=r-1} w(b_i)).w(b_r+1)$
2. $(\sigma \circ \varphi)(b.w(0)) = (\sigma \circ \varphi)(b) + 1$
3. *Soit $c \in \{e_w, w(0)\}$, on a $(\sigma \circ \varphi)(b.c) = (\sigma \circ \varphi)(b) + \varepsilon(b.c)$*
4. *Soit $v \in \{v \in \Omega(\mathbb{Z}) | \exists b \in \Omega(\mathbb{N}^*) \setminus \{e_w\}, \exists c \in \{e_w, w(0)\}, v = b.c\}$, on a : $(\sigma \circ \varphi)(a.v) = (\sigma \circ \varphi)(a) + (\sigma \circ \varphi)(v)$*

Démonstration. Montrons les différents points dans l'ordre de leur énonciation.

1. Nous avons :

$$\begin{aligned} \varphi((\textstyle\prod_{i=1}^{i=r} w(b_i)).w(0)) &= 1 + 2^{b_1}(1 + 2^{b_2}(...(1 + 2^{b_r}(1 + 2^0))...)) \\ & \qquad\qquad \text{(par définition de } \varphi) \\ &= 1 + 2^{b_1}(1 + 2^{b_2}(...(1 + 2^{b_r+1})...)) \qquad (r \geq 1) \\ &= \varphi((\textstyle\prod_{i=1}^{i=r-1} w(b_i)).w(b_r+1)) \\ & \qquad\qquad \text{(par définition de } \varphi) \end{aligned}$$

On en déduit la relation $(\prod_{i=1}^{i=r} w(b_i)).w(0) \equiv (\prod_{i=1}^{i=r-1} w(b_i)).w(b_r+1)$ par définition de $\equiv$.

2. D'après ce qui précède, $b.w(0) \equiv (\prod_{i=1}^{i=r-1} w(b_i)).w(b_r+1)$. Par conséquent, d'après (P2.3.12) :

$$\begin{aligned}(\sigma \circ \varphi)(b.w(0)) &= (\textstyle\sum_{i=1}^{i=r-1} b_i) + b_r + 1 \\ &= (\sigma \circ \varphi)(b) + 1\end{aligned}$$

3. Par définition de ε si $c = e_w$ alors $\varepsilon(bc) = 0$ puisque $b \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ sinon si $c = w(0)$ alors toujours par définition, $\varepsilon(b.c) = 1$. Donc d'après le point précédent, on en déduit, (car $|b| > 0$), $(\sigma \circ \varphi)(b.c) = (\sigma \circ \varphi)(b) + \varepsilon(b.c)$.
4. Si $v \in \{v \in \Omega(\mathbb{Z}) | \exists b \in \Omega(\mathbb{N}^*) \setminus \{e_w\}, v = b.w(0)\}$, il existe donc $b \in \Omega(\mathbb{N}^*) \setminus \{e_w\}$ tel que $v = b.w(0)$. On a :

$$\begin{aligned}(\sigma \circ \varphi)(a.v) &= (\sigma \circ \varphi)(a.b.w(0)) \\ &= (\sigma \circ \varphi)(a.b) + \varepsilon(a.b.w(0)) && \text{(cf. point précédent)} \\ &= (\sigma \circ \varphi)(a) + (\sigma \circ \varphi)(b) + \varepsilon(a.b.w(0)) && \text{(P2.3.12)} \\ &= (\sigma \circ \varphi)(a) + (\sigma \circ \varphi)(b) + \varepsilon(b.w(0)) && (a \in \Omega(\mathbb{N}^*)) \\ &= (\sigma \circ \varphi)(a) + (\sigma \circ \varphi)(b.w(0)) && \text{(cf. point précédent)} \\ &= (\sigma \circ \varphi)(a) + (\sigma \circ \varphi)(v)\end{aligned}$$

   Si $v \in \{v \in \Omega(\mathbb{Z}) | \exists b \in \Omega(\mathbb{N}^*) \setminus \{e_w\}, v = b.e_w\}$, le résultat est obtenu directement par (P2.3.12).

□

Proposition 2.6. ***Left product***
Soient $a \in \Omega(\mathbb{N})$ et $b \in \Omega(\mathbb{Z})$.

$$\textit{Si } a(|a|) > 1 \quad \textit{et } a(1) > 0 \quad \textit{alors} \qquad a.b \equiv \overline{a}.b$$

Démonstration. Soient $a \in \Omega(\mathbb{N})$ et $b \in \Omega(\mathbb{Z})$ tels que $a(1) > 0$ et $a(|a|) > 1$.
Si $U_a = \emptyset$ alors $a \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ et $a = \overline{a}$ d'après la proposition P2.3.3 d'où le résultat.
Nous allons montrer la proposition par récurrence sur r la longueur de a, l'hypothèse de récurrence est notée H_r.
Si $r = 0$, a est le mot de longueur nulle et $U_a = \emptyset$ donc H_0 est vérifiée d'après ce qui précède. De même si $r = 1$, H_1 est vérifiée pour les mêmes raisons (comme $a(|a|) > 1$ et $|a| = 1$, $U_a = \emptyset$). On a même H_2 vérifiée car U_a est encore vide puisque $a(1) > 0$.
Supposons alors que la propriété est vraie jusqu'au rang r et montrons la au rang $r + 1$. Posons $a = w(k_1, ..., k_{r+1})$. Si $U_a = \emptyset$, H_{r+1} est montrée d'après ce qui précède. Supposons $U_a \neq \emptyset$ et donc que $|a| \geq 3$, posons $i_0 = max(U_a) > 1$ car $a(1) > 0$. Il existe $i_1 > max(U_a)$ tel que $a(i_1) > 1$ car $a(|a|) > 1$ et tel que pour tous i dans $]\!]max(U_a), i_1[\![$, $a(i) = 1$. On a :
<u>Si $i_1 < r + 1$</u>, soient alors $a_1, a_2 \in \Omega(\mathbb{N})$ tels que $a = a_1.a_2$ et $|a_1| = i_1$. On a :

$$\begin{aligned}\overline{a} &= \overline{a_1.a_2} \\ &= \overline{\overline{a_1}.a_2} && (H_{i_1}) \\ &= \overline{a_1}.a_2 && (\text{P2.3.3 car } a_2 \in \Omega(\mathbb{N}^*))\end{aligned}$$

Et par suite :

$$\begin{aligned} a.b &= a_1.a_2.b \\ &\equiv \overline{a_1}.a_2.b && (\text{P2.3.6 et } H_{i_1}) \\ &\equiv \overline{a}.b && (\text{égalité ci-dessus}) \end{aligned}$$

Si $i_1 = r+1$, posons $a_1 = (\prod_{i=1}^{i=i_0-2} w(k_i)).w(k_{i_0-1}+1+r-i_0)$, on a :

$$\begin{aligned} a.b &= (\prod_{i=1}^{i=i_0-2} w(k_i)).w(k_{i_0-1},0).(\prod_{i=i_0+1}^{i=r} w(1)).w(k_{r+1}).b \\ &\equiv a_1.w(k_{r+1}-1).b && (\text{P2.2 et P2.3.5}) \\ &\equiv \overline{a_1}.w(k_{r+1}-1).b && (H_{i_0-1} \text{ car } k_{i_0-1}+1+r-i_0 > 1) \end{aligned}$$

On en déduit donc en choisissant $b = \varepsilon_w$:

$$\begin{aligned} \overline{a} &= \overline{\overline{a_1}.w(k_{r+1}-1)} \\ &= \overline{a_1}.w(k_{r+1}-1) && (\text{P2.3.3 et car } k_{r+1} > 1) \end{aligned}$$

On a donc montré $a.b \equiv \overline{a}.b$. Ce qui termine la récurrence et la démonstration.

□

Corollaire 2.1. ***Left product***
Soient $a \in \Omega(\mathbb{N})$ et $b \in \Omega(\mathbb{N}^*)$.

$$\textit{Si } a(|a|) > 1 \quad \textit{et } a(1) > 0 \quad \textit{alors} \quad \overline{a.b} = \overline{a}.b$$

Démonstration. D'après la proposition du Left-product (P2.6), $a.b \equiv \overline{a}.b$. Par suite on a donc :

$$\begin{aligned} \overline{a.b} &= \overline{\overline{a}.b} \\ &= \overline{a}.b && (\text{car } \overline{a}, b \in \Omega(\mathbb{N}^*)) \end{aligned}$$

□

Proposition 2.7. ***Congruence***
Soient $a \in \Omega(\mathbb{N})$, $b \in \Omega(\mathbb{Z})$ et $\lambda \in \mathbb{Z}$ tels que $a(1) > 0$. Alors on a :

$$a.w(\lambda).b \equiv \overline{a}.w(\lambda - \varepsilon(a)).b \qquad (H_{|a|})$$

Démonstration. Soient $a \in \Omega(\mathbb{N})$, $b \in \Omega(\mathbb{Z})$ et $\lambda \in \mathbb{Z}$ tels que $a(1) > 0$.
Si $U_a = \emptyset$ alors $a \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ et $a = \overline{a}$ d'après la proposition P2.3.3. De plus $\varepsilon(a) = 0$ par définition de ε. On a donc $a.w(\lambda) = \overline{a}.w(\lambda - \varepsilon(a))$ et donc en particulier $a.w(\lambda).b \equiv \overline{a}.w(\lambda - \varepsilon(a)).b$.
Posons $r = |a|$, si $r = 0$, a est le mot de longueur nulle et $U_a = \emptyset$ donc H_0 est vérifiée d'après ce qui précède. De même si $r = 1$, H_1 est vérifiée pour les mêmes raisons (comme $a(1) > 0$, $U_a = \emptyset$).
Supposons alors $r \geq 2$ et posons $a = w(k_1, ..., k_r)$. Si $U_a = \emptyset$, H_r est montrée d'après ce qui précède. Supposons donc $U_a \neq \emptyset$ et donc que $|a| \geq 2$ posons $i_0 = max(U_a) > 1$ car $a(1) > 0$.

1. $\underline{\text{Si } \forall i > max(U_a)\ a(i) = 1}$.
   Posons $a_1 = (\prod_{i=1}^{i=i_0-2} w(k_i)).w(k_{i_0-1} + r - i_0 + 1)$, on a :

$$
\begin{aligned}
a.w(\lambda).b &= (\prod_{i=1}^{i=i_0-1} w(k_i)).w(0).(\prod_{i_0+1}^{r} w(1)).w(\lambda).b \\
&\equiv (\prod_{i=1}^{i=i_0-2} w(k_i)).w(k_{i_0-1} + (r - i_0) + 1).w(\lambda - 1).b \\
&\qquad \text{(P2.2 en posant } v = b \text{ et en utilisant P2.3.5)} \\
&\equiv a_1.w(\lambda - \varepsilon(a)).b \qquad \text{(définition de } a_1 \text{ et car } \varepsilon(a) = 1) \\
&\equiv \overline{a_1}.w(\lambda - \varepsilon(a)).b \\
&\text{(P2.6 car } a_1(1) = a(1) > 0 \text{ et } a_1(|a_1|) = k_{i_0-1} + r - i_0 + 1 > 1 \text{ car } r \geq i_0) \\
&\equiv \overline{a}.w(\lambda - \varepsilon(a)).b \qquad \text{(P2.2 et P2.3.5 car } \overline{a} = \overline{a_1})
\end{aligned}
$$

2. $\underline{\text{Si } \exists i_1 > max(U_a)\ a(i_1) > 1}$ On a :
   Posons $a^{'} = \prod_{i=1}^{i=i_1} w(k_i)$ et $b^{'} = (\prod_{i_1+1}^{r} w(k_i)).w(\lambda).b$. Nous avons :

$$
\begin{aligned}
a.w(\lambda).b &= a^{'}.b^{'} \\
&\equiv \overline{a^{'}}.b^{'} && \text{(P2.6)} \\
&\equiv (\overline{a^{'}}.\prod_{i=i_1+1}^{i=r} w(k_i)).w(\lambda).b && \text{(définition de } b^{'}) \\
&\equiv \overline{w}(\overline{a^{'}}.\prod_{i=i_1+1}^{i=r} w(k_i)).w(\lambda).b && \text{(car } k_i > 0 \text{ pour } i \in [\![i_1+1, r]\!]) \\
&\equiv \overline{w}(a^{'}.\prod_{i=i_1+1}^{i=r} w(k_i)).w(\lambda).b \\
& && \text{(par P2.6 : } a^{'}.\prod_{i=i_1+1}^{i=r} w(k_i) \equiv \overline{a^{'}}.\prod_{i=i_1+1}^{i=r} w(k_i)) \\
&\equiv \overline{a}.w(\lambda - \varepsilon(a)).b && \text{(définition de } a^{'} \text{ et car } \varepsilon(a) = 0 \text{ ici)}
\end{aligned}
$$

□

Proposition 2.8. ***Class representant radix***
Soient $a \in \Omega(\mathbb{N})$, $b \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ et $\lambda > 1$ tels que $a(1) > 0$. Alors on a :

$$\overline{w}(a.w(\lambda).b) = \overline{a}.w(\lambda - \varepsilon(a)).b \quad (H_{|a|})$$

Démonstration. Soient $a \in \Omega(\mathbb{N})$, $b \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ et $\lambda > 1$ tels que $a(1) > 0$. On a :

$$
\begin{aligned}
\overline{a.w(\lambda).b} &= \overline{\overline{a}.w(\lambda - \varepsilon(a)).b} && \text{(P2.7)} \\
&= \overline{a}.w(\lambda - \varepsilon(a)).b && (\overline{a}, w(\lambda - \varepsilon(a)), b \in \Omega(\mathbb{N}^*))
\end{aligned}
$$

□

Proposition 2.9. ***Ob class composition***
Soient $v_1, v_2 \in \Omega(\mathbb{N})$ tels que $v_1(1) > 0$, $v_2(1) > 0$ et $v_1(|v_1|) > 1$ alors :

1. $\overline{v_1.v_2} = \overline{v_1}.\overline{v_2}$

2. $\overline{\prod_{i=1}^{i=n} v_i} = \prod_{i=1}^{i=n} \overline{v_i}$ *si $v_n(1) > 0$ et $\forall i \leq n-1, v_i(|v_i|) > 1$ et $v_i(1) > 0$*

Démonstration. Soient v_1, v_2 tels que dans l'énoncé. On a :

$$
\begin{aligned}
\overline{v_1.v_2} &= \overline{v_1.\overline{v_2}} && \text{(P2.3.9 car } \varphi(v_2) \text{ impair et } v_2 \in \Omega(\mathbb{N})) \\
&= \overline{v_1}.\overline{v_2} && \text{(C2.1)}
\end{aligned}
$$

La seconde égalité est alors évidente. □

Lemme 2.2. ***Class representant radix for alternate one word***
Soient un entier $\lambda > 1$ et $a, v \in \Omega(\mathbb{N})$ tels que
$a = w(1, \alpha_1, 1, \alpha_2, 1, ...1, \alpha_r)$, $v = a.w(\lambda)$. Alors il existe un unique mot $v^{'}$ et un unique entier $\lambda^{'}$ tels que :

- *$v \equiv v^{'}.w(\lambda^{'})$ et $v^{'} = \bar{v^{'}}$*
- *$\sigma(\bar{\varphi}(v)) = r + \lambda + \sum_{i=1}^{i=r} \alpha_i$*
- *$\lambda^{'} = \lambda - \varepsilon(a)$*

Démonstration. Commençons par montrer l'unicité.
Soit v un mot à valeurs dans $\mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $\lambda_1^{'}$ et $\lambda_2^{'}$ entiers non nuls et deux mots $v_1^{'}$, $v_2^{'}$ tels que :

$$v \equiv v_1^{'}.w(\lambda_1^{'}),\ v_1^{'} = \overline{v_1^{'}}$$
$$v \equiv v_2^{'}.w(\lambda_2^{'}),\ v_2^{'} = \overline{v_2^{'}}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
v_1^{'}.w(\lambda_1^{'}) &= \overline{v_1^{'}}.\overline{w(\lambda_1^{'})} && (\text{P2.3.3 car } v_1^{'} = \overline{v_1^{'}} \text{ et } \lambda_1^{'} > 0)\\
&= \overline{v_1^{'}.w(\lambda_1^{'})} && (\text{P2.9})\\
&= \overline{v_2^{'}.w(\lambda_2^{'})} && (v_1^{'}.w(\lambda_1^{'}) \equiv v_2^{'}.w(\lambda_2^{'}))\\
&= \overline{v_2^{'}}.\overline{w(\lambda_2^{'})} && (\text{P2.9})\\
&= v_2^{'}.w(\lambda_2^{'}) && (\text{P2.3.3 car } v_2^{'} = \overline{v_2^{'}} \text{ et } \lambda_2^{'} > 0)
\end{aligned}$$

Comme de plus $|w(\lambda_1^{'})| = |w(\lambda_2^{'})| = 1$, on en conclut d'après (P2.3.4) que $v_1^{'} = v_2^{'}$ et $\lambda_1^{'} = \lambda_2^{'}$. L'unicité est donc montrée.
Passons à l'existence. Montrons la par récurrence sur $r \geq 0$.

1. Pour $r = 0$, $v = w(\lambda)$, on choisit $v^{'} = e_w$ et $\lambda^{'} = \lambda$. Le résultat est alors immédiat. Supposons à présent l'hypothèse de récurrence valable jusqu'au rang r.
2. Montrons la au rang $r + 1$.
   Si pour tous $i \leq r + 1$, $\alpha_i > 0$ alors on pose $v^{'} = \prod_{i=1}^{i=r+1} w(1, \alpha_i)$ et $\lambda^{'}$.
   Si maintenant $U_v \neq \emptyset$, alors il existe $i_0 = max(U_v)$.
   (a) Si pour tous $i > i_0$, $\alpha_i = 1$, On a :

$$\begin{aligned}
v &= (\textstyle\prod_{i=1}^{i_0-1} w(1, \alpha_i)).w(1, 0).(\prod_{i=i_0+1}^{r+1} w(1, \alpha_i)).w(\lambda)\\
&= (\textstyle\prod_{i=1}^{i_0-1} w(1, \alpha_i)).w(1, 0).w(1)^{2(r-i_0+1)}.w(\lambda) && (\forall i > i_0, \alpha_i = 1)\\
&\equiv (\textstyle\prod_{i=1}^{i_0-1} w(1, \alpha_i)).w(2 + 2(r - i_0 + 1), \lambda - 1) && (\text{P2.2 et P2.3.5})
\end{aligned}$$

   Posons $a^{'} = \prod_{i=1}^{i_0-1} w(1, \alpha_i)$, $b^{'} = w(\lambda - 1)$ et $v_2 = a^{'}.w(\lambda_2)$ avec $\lambda_2 = 2 + 2(r - i_0 + 1)$.
   On a $i_0 - 1 \leq r$ et $\lambda_2 = 2 + 2(r - i_0 + 1) \geq 2 > 1$.
   Appliquons alors l'hypothèse de récurrence à (v_2, λ_2). Il existe donc $v_2^{'}$ et $\lambda_2^{'}$ tels que :

   i. $v_2 \equiv v_2^{'}.w(\lambda_2^{'})$ et $v_2^{'} = \overline{v_2^{'}}$

ii. $\sigma(\overline{\varphi}(v_2)) = (i_0 - 1) + \lambda_2 + \sum_{i=1}^{i=i_0-1} \alpha_i$

iii. $\lambda_2^{'} = \lambda_2 - \varepsilon(a^{'})$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\overline{v} &= \overline{a^{'}.w(\lambda_2).b^{'}} && \text{(définition de } a^{'}, b^{'}, \lambda_2 \text{ et P2.3.6)} \\
&= \overline{a^{'}}.w(\lambda_2 - \varepsilon(a^{'})).b^{'} && \text{(P2.8)} \\
&= \overline{a^{'}.w(\lambda_2)}.b^{'} && \text{(P2.8)} \\
&= \overline{v_2}.b^{'} && \text{(définition de } v_2\text{)}
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}
\sigma(\overline{\varphi}(v)) &= \sigma(\overline{\varphi}(\overline{v})) && \text{(P2.3.9)} \\
&= \sigma(\overline{\varphi}(\overline{v_2^{'}.w(\lambda_2^{'})})) + \sigma(b^{'}) && \text{(P2.3.12)} \\
&= \sigma(\overline{\varphi}(v_2)) + \sigma(b^{'}) && (v_2 \equiv v_2^{'}.w(\lambda_2^{'})) \\
&= (i_0 - 1) + \lambda_2 + (\textstyle\sum_{i=1}^{i=i_0-1} \alpha_i) + \lambda - 1 && \text{(ii. ci-dessus)} \\
&= (i_0 - 1) + 2 + 2(r - i_0 + 1) + (\textstyle\sum_{i=1}^{i=i_0-1} \alpha_i) + \lambda - 1 \\
& && \text{(définition de } \lambda_2\text{)} \\
&= i_0 + \lambda + (r - i_0 + 1) + \textstyle\sum_{i=1}^{i=r+1} \alpha_i \\
& && (\alpha_{i_0} = 0 \text{ et } \alpha_i = 1 \text{ si } i > i_0) \\
&= (r + 1) + \lambda + \textstyle\sum_{i=1}^{i=r+1} \alpha_i
\end{aligned}$$

On pose alors $v^{'} = v_2^{'}.w(\lambda_2^{'})$ et $\lambda^{'} = \lambda - 1$. Ils ont alors toutes les propriétés recherchées d'après ce qui précède. Ce qui prouve que l'hypothèse est vraie au rang $r + 1$ dans ce cas.

(b) Si maintenant il existe $i_1 > i_0$ tel que $\alpha_{i_1} > 1$.
Posons $a^{'} = \prod_{i=1}^{i_0-1} w(1, \alpha_i)$, on a alors :

$$\begin{aligned}
v &= a^{'}.w(1,0).(\textstyle\prod_{i=i_0+1}^{i_1-1} w(1,\alpha_i)).w(1,\alpha_{i_1}).(\prod_{i=i_1+1}^{r+1} w(1,\alpha_i)).w(\lambda) \\
&= a^{'}.w(1,0).w(1)^{2(i_1-i_0-1)+1}.w(\alpha_{i_1}).(\textstyle\prod_{i=i_1+1}^{r+1} w(1,\alpha_i)).w(\lambda) \\
&\equiv a^{'}.w(2(i_1 - i_0) + 1, \alpha_{i_1} - 1).(\textstyle\prod_{i=i_1+1}^{r+1} w(1,\alpha_i)).w(\lambda) \\
& \qquad \text{(P2.2 et P2.3.5)}
\end{aligned}$$

Posons $b^{'} = w(\alpha_{i_1} - 1).(\prod_{i=i_1+1}^{r+1} w(1,\alpha_i)).w(\lambda)$ et $v_2 = a^{'}.w(\lambda_2)$ avec $\lambda_2 = 2(i_1 - i_0) + 1$.
On a $i_1 - i_0 \geq 1$ et $\lambda_2 = 2(i_1 - i_0) + 1 \geq 3 > 1$.
Appliquons alors l'hypothèse de récurrence à (v_2, λ_2). Il existe donc $v_2^{'}$ et $\lambda_2^{'}$ tels que :

i. $v_2 \equiv v_2^{'}.w(\lambda_2^{'})$ et $v_2^{'} = \overline{v_2^{'}}$

ii. $\sigma(\overline{\varphi}(v_2)) = (i_0 - 1) + \lambda_2 + \sum_{i=1}^{i=i_0-1} \alpha_i$

iii. $\lambda_2^{'} = \lambda_2 - \varepsilon(a^{'})$

On en déduit en procédant comme au (a) :

$$\begin{aligned}
\sigma(\overline{\varphi}(v)) &= \sigma(\overline{\varphi}(v_2)) + \sigma(b^{'}) \\
&= \sigma(\overline{\varphi}(v_2)) + \lambda - 1 + (1 + r - i_1) + \textstyle\sum_{i=i_1}^{i=r+1} \alpha_i \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(définition de } b^{'}\text{)} \\
&= (i_0 - 1) + \lambda_2 + (\textstyle\sum_{i=1}^{i_0-1} \alpha_i) + \lambda - 1 + (1 + r - i_1) + \textstyle\sum_{i=i_1}^{r+1} \alpha_i \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(ii. ci-dessus)} \\
&= (r+1) + \lambda - 1 + (\textstyle\sum_{i=1}^{i=i_0-1} \alpha_i) + 0 + (\textstyle\sum_{i=i_1}^{i=r+1} \alpha_i) + \\
&\quad\ i_0 - 1 - i_1 + 2(i_1 - i_0) + 1 \qquad\qquad \text{(définition de } \lambda_2\text{)} \\
&= (r+1) + \lambda + (\textstyle\sum_{i=1}^{i=i_0} \alpha_i) + (i_1 - i_0 - 1) + 1 + \textstyle\sum_{i=1}^{i=r+1} \alpha_i \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(car } \alpha_{i_0} = 0\text{)} \\
&= (r+1) + \lambda + \textstyle\sum_{i=1}^{i=r+1} \alpha_i \qquad \text{(car } \alpha_i = 1 \text{ si } i_0 < i < i_1\text{)}
\end{aligned}$$

On pose alors $v^{'} = v_2^{'}.w(\lambda_2^{'}).w(1, \alpha_{i_1} - 1).(\prod_{i=i_1+1}^{r+1} w(1, \alpha_i))$ et $\lambda^{'} = \lambda$. Ils ont alors toutes les propriétés recherchées d'après ce qui précède. Ce qui prouve que l'hypothèse est vraie au rang $r+1$ dans ce cas.

Ceci clôt la récurrence et donc la démonstration d'existence.

$\square$

Lemme 2.3. ***Class representant norm for alternates ones word*** *Soit un entier $r \geq 0$, v un mot à valeurs dans $\mathbb{N}$ tel que $v = (\prod_{i=1}^{i=r} w(1, \alpha_i)).w(1)$. On a :*

$$\sigma(\bar{\varphi}(v)) = \varepsilon(v) + 1 + r + \textstyle\sum_{i=1}^{i=r} \alpha_i$$

Démonstration. Démontrons le par récurrence sur r.
Si $r = 0$, $v = w(1)$ et $\sigma(\bar{\varphi}(v)) = 1 + r + \sum_{i=1}^{i=r} \alpha_i = 1$.
Supposons alors la récurrence vraie jusqu'au rang r et montrons la au rang $r+1$.
On a $v = (\prod_{i=1}^{i=r+1} w(1, \alpha_i)).w(1)$.
Si $card(U_v) = \emptyset$, on a bien sûr $\sigma(\bar{\varphi}(v)) = 1 + (r+1) + \sum_{i=1}^{i=r} \alpha_i$.
Si $card(U_v) \neq \emptyset$, posons $i_0 = max(U_v)$.

— Si $\forall i > i_0\ \alpha_i = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
v &= (\textstyle\prod_{i=1}^{i=i_0-1} w(1, \alpha_i)).w(1, 0).(\prod_{i=i_0+1}^{i=r+1} w(1, \alpha_i)).w(1) \\
&= (\textstyle\prod_{i=1}^{i=i_0-1} w(1, \alpha_i)).w(1, 0).w(1)^{2(r-i_0+1)+1} \qquad (\forall i > i_0, \alpha_i = 1) \\
&\equiv (\textstyle\prod_{i=1}^{i=i_0-1} w(1, \alpha_i)).w(1 + 1 + 2(r - i_0 + 1) + 1) \qquad \text{(P2.2)}
\end{aligned}$$

D'après le lemme L2.2, on a :

$$\begin{aligned}
\sigma(\bar{\varphi}(v)) &= (i_0 - 1) + (1 + 1 + 2(r - i_0 + 1) + 1) + \textstyle\sum_{i=1}^{i=i_0-1} \alpha_i \\
&= (i_0 - 1) + (1 + 1 + (r - i_0 + 1) + 1) + \textstyle\sum_{i=1}^{i=r+1} \alpha_i \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (\alpha_{i_0} = 0 \text{ et } \forall i > i_0, \alpha_i = 1) \\
&= (r+1) + 2 + \textstyle\sum_{i=1}^{i=r+1} \alpha_i
\end{aligned}$$

— Si $\exists i_1 > i_0 \ \alpha_{i_1} > 1$.
Posons $a = (\prod_{i=1}^{i=i_1-1} w(1, \alpha_i)).w(1)$,
$b = (\prod_{i=i_1+1}^{i=r+1} w(1, \alpha_i)).w(1)$ on a $v = a.w(\alpha_{i_1}).b$. On en déduit d'après la proposition P2.8 $\overline{v} = \overline{a}.w(\alpha_{i_1} - 1).b$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\sigma(\overline{\varphi}(v)) &= \sigma(\overline{\varphi}(\overline{a})) + \alpha_{i_1} - 1 + \sigma(\overline{\varphi}(b)) && \text{(P2.3.12)} \\
&= \sigma(\overline{\varphi}(\overline{a})) + r - i_1 + (\textstyle\sum_{i=i_1}^{i=r+1} \alpha_i) + 1 && \text{(définition de b)} \\
&= \varepsilon(a) + i_1 + \textstyle\sum_{i=1}^{i=i_1-1} \alpha_i + r - i_1 + (\sum_{i=i_1}^{i=r+1} \alpha_i) + 1 \\
& && \text{(hypothèse de récurrence)} \\
&= (r+1) + 1 + \varepsilon(v) + \textstyle\sum_{i=1}^{i=r+1} \alpha_i && (\varepsilon(v) = 0 \text{ et } \varepsilon(a) = 1)
\end{aligned}$$

La récurrence est donc terminée, ce qui achève la démonstration. □

2.2 $W(3^t)$

Proposition 2.10. ***3-base Ob word form***
Nous avons les propriétés suivantes :

1. *Soient r et x tels que $x \in A_r$ et $W(x) = w(k_1, ..., k_r)$. On a alors :*

$$W(3x) = \bar{w}(w(1) \cdot \textstyle\prod_{i=1}^{i=r} w(k_i - 1, 1))$$

2. *Soit n un entier $(k1, ..., k_r)$ tels que $W(3^n) = w(k_1, ..., k_r)$ alors :*

$$W(3^{n+1}) = \bar{w}(w(1) \cdot \textstyle\prod_{i=1}^{i=r} w(k_i - 1, 1))$$

Démonstration. Montrons les points dans l'ordre d'apparition.

1. Soient r et x tels que $x \in A_r$ et $W(x) = w(k_1, ..., k_r)$. On a :

$$\begin{aligned}
3x &= 2f(x) - 1 \text{ par définition de } f \\
&= 2^2(1 + 2^{k_1-2}(1 + 2(1 + 2^{k_2-1}(1 + 2(...(1 + 2^{k_r-1}(1+2))...))))) - 1 \\
& && \text{(P1.3)} \\
&= 1 + 2(1 + 2^{k_1-1}(1 + 2(1 + 2^{k_2-1}(1 + 2(...(1 + 2^{k_r-1}(1+2))...))))) \\
&= \varphi(1, k_1 - 1, 1, ..., k_r - 1, 1) && \text{(définition de } \varphi) \\
&= \bar{\varphi}(1, k_1 - 1, 1, ..., k_r - 1, 1) && \text{(P2.3.9 car } 3x \text{ impair)}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
W(3x) &= W(\bar{\varphi}(1, k_1 - 1, 1, ..., k_r - 1, 1)) \\
&= \bar{w}(1, k_1 - 1, 1, ..., k_r - 1, 1) && \text{(définition de } \bar{w})
\end{aligned}$$

2. Ce résultat est évident compte tenu de ce qui précède.

□

Notation 2.3. ***$\xi(t)$***
Posons $U_t = \{i | W(3^t)(i) = 1\}$, on note ξ l'application définie par :

$$\begin{array}{rcll} \xi & : & \mathbb{N} & \rightarrow \quad \{0,1\} \\ & & t & \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } U_t \neq \emptyset \text{ et } \forall\, i > max(U_t)\ W(3^t)(i) = 2\,; \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Lemme 2.4. ***ξ-ε relationship***
Soit la suite $(k_{t,i})_{1 \leq i \leq p_t}$ telle que $Ob(3^t) = (k_{t,1}, ..., k_{t,p_t})$. Posons également $v_t = w(1, k_{t,1} - 1, 1, k_{t,2} - 1, 1, ..., k_{t,p_t} - 1, 1)$. On a :

$$\xi(t) = \varepsilon(v_t)$$

Démonstration. Il suffit de dérouler les définitions de ε (N2.2), v_t et ξ (N2.3) et dans les 3 cas :

— $U_t = \emptyset$
— $U_t \neq \emptyset$ et $\forall\, i > max(U_t)\ W(3^t)(i) = 2$
— $U_t \neq \emptyset$ et $\exists\, i > max(U_t)\ W(3^t)(i) > 2$

□

Lemme 2.5. ***3-base Ob norm***
Pout tout entier $t \geq 0$, on a :

$$\sigma(3^{t+1}) = \sigma(3^t) + 1 + \xi(t)$$

Démonstration. Soit la suite $(k_{t,i})_{1 \leq i \leq p_t}$ telle que $Ob(3^t) = (k_{t,1}, ..., k_{t,p_t})$. Posons également $v_t = w(1, k_{t,1} - 1, 1, k_{t,2} - 1, 1, ..., k_{t,p_t} - 1, 1)$. On a :

$$\begin{aligned} \sigma(3^{t+1}) &= \sigma(\varphi(W(3^{t+1}))) && \text{(N2.1)} \\ &= \sigma(\varphi(\overline{v_t})) && \text{(P2.10)} \\ &= \sigma(\overline{\varphi}(\overline{v_t})) && \text{(P2.3.9 car } \varphi(\overline{v_t}) \text{ impair)} \\ &= \sigma(\overline{\varphi}(v_t)) && \text{(P2.3.8)} \\ &= \varepsilon(v_t) + 1 + p_t + \textstyle\sum_{i=1}^{i=p_t} (k_{t,i} - 1) && \text{(L2.3)} \\ &= \varepsilon(v_t) + 1 + \sigma(3^t) && \text{(par définition des } k_{t,i}) \\ &= \xi(t) + 1 + \sigma(3^t) && \text{(L2.4)} \end{aligned}$$

□

2.3 Derivation in $\Omega(\mathbb{N}^*)$

Théorème 2.6. ***Collatz derivated word Theorem***
Soit $x \in A_r$ tel que $W(x) = w(x_1, ..., x_r)$ et soit $t \geq 0$ un entier tel que $t < min(\frac{x_1}{2}, \frac{ln(2).(x_2 - 1 + \xi(t-1))}{ln(3)}, ..., \frac{ln(2).(x_r - 1 + \xi(t-1))}{ln(3)})$. Alors on a :

$$W(\bar{f}^t(x)) = w(x_1 - 2t) \cdot W(3^t) \cdot \prod_{i=2}^{i=r} (w(x_i - \sigma(3^t)) \cdot W(3^t))$$

Démonstration. Soit $x \in A_r$, tel que $W(x) = w(x_1, ...x_r)$.
Montrons le par récurrence sur t.
<u>Si $t = 0$:</u>
On a :

$$\begin{aligned} W(\overline{f}^0(x)) &= W(x) \\ &= w(x_1, ..., x_r) && \text{(définition de } x) \\ &= w(x_1 - 2 * 0).W(3^0).\prod_{i=2}^{i=r} (w(x_i - \sigma(3^0)).W(3^0)) \\ & \qquad (\sigma(3^0) = \lfloor \tfrac{0 * ln(3)}{ln(2)} \rfloor \text{ d'après P1.2 et } W(3^0) = e_w) \end{aligned}$$

Le résultat est alors acquit pour $t = 0$.
Supposons à présent l'hypothèse de récurrence vraie jusqu'au rang t et montrons la au rang $t + 1$.
Supposons alors que $t + 1 < min(\frac{x_1}{2}, \frac{ln(2).(x_2-1+\xi(t))}{ln(3)}, ..., \frac{ln(2).(x_r-1+\xi(t))}{ln(3)})$.
Notons que nous avons :

1. $x_1 - 2(t + 1) > 0$
2. $x_i - 1 - \sigma(3^t) > 1$ pour tous $2 \leq i \leq r$

La première inégalité est évidente, montrons la seconde. Soit un entier $2 \leq i \leq r$, on a :

$$\begin{aligned} t + 1 < \frac{ln(2)}{ln(3)}.(x_i - 1 + \xi(t)) &\Leftrightarrow \frac{ln(3)}{ln(2)}.(t + 1) < x_i - 1 + \xi(t) \\ &\Leftrightarrow \lfloor \frac{ln(3)}{ln(2)}.(t + 1) \rfloor < x_i - 1 + \xi(t) \quad \text{(car } \xi(t) \in \mathbb{N}) \\ &\Leftrightarrow \sigma(3^{t+1}) < x_i - 1 + \xi(t) && \text{(P1.2)} \\ &\Leftrightarrow \sigma(3^{t+1}) - \sigma(3^t) < x_i - 1 + \xi(t) - \sigma(3^t) \\ &\Leftrightarrow 1 < x_i - 1 - \sigma(3^t) && \text{(L2.5)} \end{aligned}$$

Soit la suite $(k_{t,i})_{1 \leq i \leq p_t}$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $Ob(3^t) = (k_{t,1}, ..., k_{t,p_t})$. Posons également $\mu_t = \prod_{j=1}^{j=p_t} w(k_{t,j} - 1, 1)$ et $\nu_t = w(1) \cdot \mu_t$. On a :

$$\begin{aligned} W(\bar{f}^{t+1}(x)) &= (W \circ \overline{f})(\overline{f}^t(x)) \\ &= (W \circ f)(\overline{f}^t(x)) && \text{(P2.3.13)} \\ &= (W \circ f)((\varphi \circ W)(\overline{f}^t(x))) && \text{(P2.3.11 car } \overline{f}^t(x) \text{ impair)} \\ &= (W \circ f \circ \varphi)(W(\overline{f}^t(x))) \\ &= (W \circ f \circ \varphi)(w(x_1 - 2t) \cdot W(3^t) \cdot \prod_{i=2}^{i=r} [w(x_i - \sigma(3^t)) \cdot W(3^t)]) \\ & \qquad \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= (W \circ f \circ \varphi)(w(x_1 - 2t) \cdot \prod_{j=1}^{j=p_t} w(k_{t,j}) \cdot \\ & \qquad \prod_{i=2}^{i=r} [w(x_i - \sigma(3^t)) \cdot \prod_{j=1}^{j=p_t} w(k_{t,j})]) \quad \text{(définition de } W(3^t)) \\ &= \overline{w}(w(x_1 - 2t - 2, 1) \cdot \prod_{j=1}^{j=p_t} w(k_{t,j} - 1, 1) \cdot \\ & \qquad \prod_{i=2}^{i=r} [w(x_i - \sigma(3^t) - 1, 1) \cdot \prod_{j=1}^{j=p_t} w(k_{t,j} - 1, 1)]) \\ & \qquad \text{(P2.3.14 et car } k_{t,j} > 0,\ x_1 - 2t > 2,\ x_i - \sigma(3^t) > 2 > 0) \end{aligned}$$

Pour des soucis de concision, posons $X_t = w(x_1 - 2t - 2)$. On a :

$$\begin{aligned}
W(\bar{f}^{t+1}(x)) &= \overline{w}(X_t \cdot w(1) \cdot \mu_t \cdot \textstyle\prod_{i=2}^{i=r} [w(x_i - \sigma(3^t) - 1, 1) \cdot \mu_t]) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(définition de } \mu_t) \\
&= \overline{w}(X_t \cdot \nu_t \cdot \textstyle\prod_{i=2}^{i=r} [w(x_i - \sigma(3^t) - 1) \cdot \nu_t]) \qquad \text{(définition de } \nu_t) \\
&= X_t \cdot \overline{w}(\nu_t \cdot \textstyle\prod_{i=2}^{i=r} [w(x_i - \sigma(3^t) - 1) \cdot \nu_t]) \\
&\qquad\qquad \text{(P2.3.10 car } \nu_t(1) = 1 > 0,\ x_1 - 2(t+1) > 0) \\
&= X_t \cdot \overline{w}(\textstyle\prod_{i=2}^{i=r} [\nu_t \cdot w(x_i - \sigma(3^t) - 1)] \cdot \nu_t) \\
&= X_t \cdot \textstyle\prod_{i=2}^{i=r} [\overline{w}(\nu_t \cdot w(x_i - \sigma(3^t) - 1))] \cdot \overline{w}(\nu_t) \\
&\qquad\qquad \text{(P2.9 car } \nu_t(1) > 0,\ x_i - \sigma(3^t) - 1 > 1) \\
&= X_t \cdot \textstyle\prod_{i=2}^{i=r} [\overline{w}(\nu_t) \cdot w(x_i - \sigma(3^t) - 1 - \varepsilon(\nu_t))] \cdot \overline{w}(\nu_t) \\
&\qquad\qquad \text{(P2.8 car } x_i - \sigma(3^t) - 1 > 1) \\
&= X_t \cdot \textstyle\prod_{i=2}^{i=r} [\overline{w}(\nu_t) \cdot w(x_i - \sigma(3^t) - 1 - \xi(t))] \cdot \overline{w}(\nu_t) \qquad \text{(L2.4)} \\
&= X_t \cdot \textstyle\prod_{i=2}^{i=r} [\overline{w}(\nu_t) \cdot w(x_i - \sigma(3^{t+1}))] \cdot \overline{w}(\nu_t) \qquad \text{(L2.5)} \\
&= X_t \cdot \textstyle\prod_{i=2}^{i=r} [W(3^{t+1}) \cdot w(x_i - \sigma(3^{t+1}))] \cdot W(3^{t+1}) \\
&\qquad\qquad \text{(P2.10 et définition de } \nu_t)
\end{aligned}$$

Ce qui termine la récurrence. □

Remarque 2.7. *Ce théorème n'est pas très pratique car les restrictions sur t sont trop fortes pour être utilisables dans un cas réel. La raison de sa présence est de mettre en avant le comportement de la dérivation qui a permis de faire émerger les propriétés de base sur les mots, en particulier sur $W(3^t)$. Une version généralisée est développée dans la partie suivante. Les principes de base de la démonstration seront similaires.*

3 Words of $\mathbb{Z}$ elements

3.1 K_p^t and B_r

Notation 3.1. $K_p^n(x)$
Soit $r \geq 0$ et soit $x \in A_r$ tel que $Ob(x) = (k_1, ..., k_r)$. Soient $p, q \leq r$ et $t \in \mathbb{N}$. On définit l'application $K_{p,q}^t$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcccc} K_{p,q}^t & : & A_r & \rightarrow & \Omega(\mathbb{Z}) \\ & & x & \mapsto & W(3^t).\prod_{i=p}^{i=q} (w(k_i - \sigma(3^t)).W(3^t)) \end{array}$$

On pose également $K_p^t(x) = K_{p,r}^t(x)$

Notation 3.2. $S_p(x)$
Soit $r \geq 0$ et soit $x \in A_r$ tels que $Ob(x) = (k_1, ..., k_r)$. Soit $p \in [\![1, r]\!]$. On définit l'application S_p de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcccc} S_p & : & A_r & \rightarrow & \Omega(\mathbb{N}^*) \\ & & x & \mapsto & \prod_{i=p}^{i=\lambda(x)} w(k_i) \end{array}$$

Remarquons que $S_p(1) = e_w$.

Définition 3.1. B_r - Odd sets
Posons $B_0 := \{e_w\}$ et pour tout $r > 0$,
$B_r := \{v \in \Omega(\mathbb{Z}) | \exists x_1, \dots, x_r \in \mathbb{Z}, v = w(x_1, ..., x_r)$ et $\forall j \in [\![1, r]\!] \sum_{i=1}^{i=j} x_i > 0\}$.

Remarque 3.1. *Pour tous $r_1, r_2 \geq 0$, $a \in B_{r_1}$ et $b \in B_{r_2}$, on a $a.b \in B_{r_1+r_2}$. Ceci tient au fait que a est un préfixe de $a.b$.*

Démonstration. Comme $a \in B_{r_1}$, pour tous $j \in [\![1, r_1]\!]$, $\sum_{i=1}^{i=j} a(i) > 0$, de même pour tous $j \in [\![1, r_2]\!]$, $\sum_{i=1}^{i=j} b(i) > 0$. On a pour tous $j \in [\![1, r_1]\!]$, $\sum_{i=1}^{i=j} (ab)(i) = \sum_{i=1}^{i=j} a(i) > 0$ car $j \leq r_1$. Par ailleurs, pour tous $j \in [\![r_1 + 1, r_1 + r_2]\!]$:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=1}^{i=j} (ab)(i) &= \textstyle\sum_{i=1}^{i=r_1} (ab)(i) + \sum_{i=r_1+1}^{i=j} (ab)(i) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{i=r_1} a(i) + \sum_{i=1}^{i=j-r_1} (ab)(i + r_1) && (|a| = r_1,\ j > r_1) \\
&= (\sigma \circ \varphi)(a) + \textstyle\sum_{i=1}^{i=j-r_1} b(i) && (|a| = r_1) \\
&> 0 && (\ a \in B_{r_1} \text{ et } b \in B_{r_2})
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tous $j \in [\![1, r_1 + r_2]\!]$, $\sum_{i=1}^{i=j} (ab)(i) > 0$. Autrement dit, $ab \in B_{r_1+r_2}$. □

Proposition 3.1. B_r ***and*** $2\mathbb{N} + 1$ ***relationship***
Nous avons : $\bigcup\limits_{r \geq 0} A_r = \bigcup\limits_{r \geq 0} \varphi(B_r) = 2\mathbb{N} + 1$.

Démonstration. L'égalité $\bigcup\limits_{r \geq 0} A_r = 2\mathbb{N} + 1$ est là pour rappel et découle de la décomposition unique des entiers en puissances de 2. Par définition, pour tous $r \geq 0$, $A_r \subseteq \varphi(B_r)$ d'où $\bigcup\limits_{r \geq 0} A_r \subseteq \bigcup\limits_{r \geq 0} \varphi(B_r)$. De plus, d'après (L1.3), $\varphi(B_r) \subseteq 2\mathbb{N} + 1$. Par conséquent, $\bigcup\limits_{r \geq 0} \varphi(B_r) \subseteq 2\mathbb{N} + 1$. Ce qui prouve cette double égalité. □

Proposition 3.2. $K_p^t \in \widetilde{\Omega(\mathbb{N}^*)}$
Soit x impair tel que $Ob(x) = (k_1, ..., k_r)$ et soient $t \geq 0$, $p, q \leq \lambda(x)$ alors si $l = |K_{p,q}^t(x)|$:

— $\sum_{i=1}^{i=l} K_{p,q}^t(x)(i) = \sigma(3^t) + \sum_{i=p}^{i=q} k_i$
— $K_{p,q}^t(x) \in B_l$
— $K_{p,q}^t(x) \in \widetilde{\Omega(\mathbb{N}^*)}$

Démonstration. Si $x = 1$ ou $p > q$ alors $K_{p,q}^t(x) = W(3^t) \in \Omega(\mathbb{N}^*) \subset \widetilde{\Omega(\mathbb{N}^*)}$ et bien sûr $K_{p,q}^t(x) \in B_l$. Supposons alors $x > 1$ et $p \leq q$.
Posons pour tous $i \in [\![p, q]\!]$, $v_i = W(3^t).w(k_i - \sigma(3^t))$. On a :

$$K_p^t(x) = (\textstyle\prod_{i=p}^{i=q} v_i).W(3^t)$$

Posons $s = |W(3^t)|$, comme $W(3^t) \in \Omega(\mathbb{N}^*)$, pour tous $j \in [\![1, s]\!]$, $\sum_{a=1}^{a=j} W(3^t)(a) > 0$. On a $l = (q-p+1)(s+1)+s$. De plus, $\sum_{a=1}^{a=|v_i|} v_i(a) = (\sum_{a=1}^{a=s} W(3^t)(a)) + k_i - \sigma(3^t) = k_i > 0$. Par conséquent, $v_i \in B_{s+1}$. On en déduit d'après la remarque (R3.1) que $K_{p,q}^t(x) \in B_{(q-p+1)(s+1)+s} = B_l$. Comme $K_{p,q}^t(x) \in B_l$, $\varphi(K_{p,q}^t(x)) \in 2\mathbb{N}+1$ d'après (P3.1). Autrement dit, $\varphi(K_{p,q}^t(x)) = \varphi(\overline{K_{p,q}^t(x)})$ d'après (P2.3.9) et $K_{p,q}^t(x) \in \widetilde{\Omega(\mathbb{N}^*)}$. Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=1}^{i=l} K_{p,q}^t(x)(i) &= (\textstyle\sum_{i=p}^{i=q} \sum_{a=1}^{a=|v_i|} v_i(a)) + (\sum_{a=1}^{a=s} W(3^t)(a)) \\
&= (\textstyle\sum_{i=p}^{i=q} k_i) + (\sum_{a=1}^{a=s} W(3^t)(a)) \qquad \text{(cf. ci-dessus)} \\
&= \sigma(3^t) + \textstyle\sum_{i=p}^{i=q} k_i
\end{aligned}$$

□

3.2 F-stability of K_p^t

Définition 3.2. F operator
On note F l'application défini par :

$$\begin{array}{cccc}
F & : & \Omega(\mathbb{Z}) & \to & \Omega(\mathbb{Z}) \\
 & & v & \mapsto & \prod_{i=1}^{i=|v|} w(1, v(i)-1)
\end{array}$$

Remarquons tout de suite que si $|v| = 0$ alors $F(v) = e_w$ avec les conventions usuelles sur le produit.

Proposition 3.3. ***Basic F properties***

1. *Pour tous $a, b \in \Omega(\mathbb{Z})$, $F(a.b) = F(a).F(b)$.*
2. *Pour tous $t \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, $d \in \Omega(\mathbb{Z})$ on a :*
$$F(W(3^t).w(\alpha - \sigma(3^t))).d \equiv W(3^{t+1}).w(\alpha - \sigma(3^{t+1})).d$$
3. *Soient x impair, $r = \lambda(x)$, $p, q \leq r$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, $t \geq 0$ alors pour tous $d \in \Omega(\mathbb{Z})$:*
$$F(K_{p,q}^t(x).w(\alpha - \sigma(3^t))).d \equiv K_{p,q}^{t+1}(x).w(\alpha - \sigma(3^{t+1})).d$$
4. *Soient x impair, $r = \lambda(x)$, $p, q \leq r$ alors on a :*
$$F(K_{p,q}^t(x)).w(1) \equiv K_{p,q}^{t+1}(x)$$
5. *Soient $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{Z}$, $d \in \Omega(\mathbb{Z})$. Nous avons la propriété (P_n) suivante :*
$$\varphi(w(0).w(1)^n.w(\gamma).d) = 2^{n+1}\varphi(w(\gamma - 1).d)$$
6. *Soient $r \geq 0$, $v \in B_r$ alors $f(\varphi(v)) = \frac{1}{2}\varphi(w(0).F(v).w(1))$.*
7. *Soient $r \geq 0$, $v \in B_r$ alors $\overline{f}(\varphi(v)) = \overline{\varphi}(w(0).F(v).w(1))$.*

Démonstration. Montrons ces propriétés dans l'ordre de leur apparition.

1. Pour tous $a, b \in \Omega(\mathbb{Z})$, on a :

$$\begin{aligned} F(a.b) &= \prod_{i=1}^{i=|a.b|} F(w((a.b)(i))) \\ &= [\prod_{i=1}^{i=|a|} F(w((a.b)(i)))]. \prod_{i=|a|+1}^{i=|a|+|b|} F(w((a.b)(i))) \\ &= [\prod_{i=1}^{i=|a|} F(w(a(i)))]. \prod_{i=1}^{i=|b|} F(w(b(i))) \\ &= F(a).F(b) \end{aligned}$$

2. Pour tous $t \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, $d \in \Omega(\mathbb{Z})$ on a :

$$\begin{aligned} F(W(3^t).w(\alpha - \sigma(3^t))).d &= F(W(3^t)).F(w(\alpha - \sigma(3^t))).d && \text{(P3.3.1)} \\ &= F(W(3^t)).w(1).w(\alpha - \sigma(3^t) - 1).d \\ & && \text{(définition de } F\text{)} \\ &\equiv \overline{w}(\theta_t).w(\alpha - \sigma(3^t) - 1 - \varepsilon(\theta_t)).d \\ & && \text{(P2.7 et avec } \theta_t = F(W(3^t)).w(1)\text{)} \\ &\equiv \overline{w}(\theta_t).w(\alpha - \sigma(3^t) - 1 - \xi(t)).d && \text{(L2.4)} \\ &\equiv \overline{w}(\theta_t).w(\alpha - \sigma(3^{t+1})).d && \text{(L2.5)} \\ &\equiv W(3^{t+1}).w(\alpha - \sigma(3^{t+1})).d && \text{(P2.10)} \end{aligned}$$

3. Soient x impair, $r = \lambda(x)$, $p, q \leq r$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, $t \geq 0$ et soit $d \in \Omega(\mathbb{Z})$. Si $p > q$, on a $K_{p,q}^t(x) = W(3^t)$ et on se retrouve dans le cas précédent (P3.3.2). Supposons à présent $p \leq q$, posons $W(x) = w(x_1, ..., x_r)$ et pour tous $i \in [\![p, q]\!]$, $k_i = x_i$ et $k_{q+1} = \alpha$. On a :

$$\begin{aligned} F(K_{p,q}^t(x).w(\alpha - \sigma(3^t))).d &= F(\prod_{i=p}^{i=q+1} W(3^t).w(k_i - \sigma(3^t))).d \\ & && \text{(définition de } k_i\text{)} \\ &= [\prod_{i=p}^{i=q+1} F(W(3^t).w(k_i - \sigma(3^t)))].d \\ & && \text{(P3.3.1)} \\ &\equiv [\prod_{i=p}^{i=q+1} W(3^{t+1}).w(k_i - \sigma(3^{t+1}))].d \\ & && \text{(P3.3.2 et P2.3.5)} \\ &\equiv K_{p,q}^{t+1}(x).w(\alpha - \sigma(3^{t+1})).d \\ & && \text{(définition de } k_i\text{)} \end{aligned}$$

4. Soient x impair, $r = \lambda(x)$, $p, q \leq r$. Si $p > q$ alors $K_{p,q}^t(x) = W(3^t)$ et d'après (P2.10), $\overline{w}(F(W(3^t)).w(1)) \equiv W(3^{t+1})$. Supposons à présent $p \leq q$ et comme ci-dessus, posons $W(x) = w(x_1, ..., x_r)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} F(K_{p,q}^t(x)).w(1) &= F(K_{p,q-1}^t(x).w(x_q - \sigma(3^t)).W(3^t)).w(1) && (p \leq q) \\ &= F(K_{p,q-1}^t(x).w(x_q - \sigma(3^t))).F(W(3^t)).w(1) && \text{(P3.3.1)} \\ &\equiv K_{p,q-1}^{t+1}(x).w(x_q - \sigma(3^{t+1})).F(W(3^t)).w(1) && \text{(P3.3.3)} \\ &\equiv K_{p,q-1}^{t+1}(x).w(x_q - \sigma(3^{t+1})).W(3^{t+1}) \\ & && \text{(P2.10 et P2.3.5)} \\ &\equiv K_{p,q}^{t+1}(x) \end{aligned}$$

5. Comme $\varphi(w(0, \gamma).d) = 1 + 2^0(1 + 2^\gamma(\varphi(d))) =$ $2(1 + 2^{\gamma-1}(\varphi(d))) = 2^1\varphi(w(\gamma - 1).d)$, P_0 est vraie. Supposons alors P_n

vraie jusqu'au rang n et montrons P_{n+1}. Nous avons :

$$\begin{aligned}\varphi(w(0).w(1)^{n+1}.w(\gamma).d) &= \varphi(w(0).w(1)^n.w(1).w(\gamma).d) \\ &= 2^{n+1}(\varphi(w(0).w(\gamma).d)) && (P_n) \\ &= 2^{(n+1)+1}(\varphi(w(\gamma-1).d)) && (P_0)\end{aligned}$$

6. Soient $r \geq 0$ et $v \in B_r$. D'après (L1.3), $\varphi(v)$ est impair. Nous avons :

$$\begin{aligned}f(\varphi(v)) &= 2\varphi(w(v(1)-2,1).\textstyle\prod_{i=2}^{i=r} w(v(i)-1,1)) && (\text{P1.3 et car } v \in B_r) \\ &= 2^{-1}\varphi(w(0,1,v(1)-1,1).\textstyle\prod_{i=2}^{i=r} w(v(i)-1,1)) && (\text{P3.3.5}) \\ &= 2^{-1}\varphi(w(0).(\textstyle\prod_{i=1}^{i=r} F(w(v(i)))).w(1)) && (\text{définition de } F) \\ &= 2^{-1}\varphi(w(0).F(\textstyle\prod_{i=1}^{i=r} w(v(i))).w(1)) && (\text{P3.3.1}) \\ &= 2^{-1}\varphi(w(0).F(v).w(1)) && (\text{définition de } v)\end{aligned}$$

7. Soient $r \geq 0$, $v \in B_r$. D'après le point précédent, (P3.3.6), nous avons $f(\varphi(v)) = 2^{-1}\varphi(w(0).F(v).w(1))$. Comme $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $f(\varphi(v)) \in \mathbb{N}$ et $\varphi(w(0).F(v).w(1)) \in 2\mathbb{N}$, par conséquent : $\overline{f}(\varphi(v)) = Odd(f(\varphi(v))) = Odd(2^{-1}\varphi(w(0).F(v).w(1))) = \overline{\varphi}(w(0).F(v).w(1))$.

□

Théorème 3.2. ***Generalized compact derivation***
Soit $d \geq 2$ et soit $y \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe :

— $w(\alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1}) \in B_{d-1}$

— $\theta_1, \ldots, \theta_d \in 2\mathbb{N}+1$

— $(p_i)_{1\leq i\leq d}$, $(q_i)_{1\leq i\leq d}$ *deux suites à valeurs dans* $\mathbb{N}^*$ *telles que* $p_i, q_i \leq \lambda(\theta_i)$

— $(t_i)_{1\leq i\leq d}$ *une suite à valeurs dans* $\mathbb{N}$

— $y = \varphi([\prod_{i=1}^{i=d-1} K_{p_i,q_i}^{t_i}(\theta_i).w(\alpha_i - \sigma(3^{t_i}))].K_{p_d,q_d}^{t_d}(\theta_d))$

Alors y est impair et on a :

$$f(y) = \tfrac{1}{2}\varphi(w(0).[\textstyle\prod_{i=1}^{i=d-1} K_{p_i,q_i}^{t_i+1}(\theta_i).w(\alpha_i - \sigma(3^{t_i+1}))].K_{p_d,q_d}^{t_d+1}(\theta_d))$$

Démonstration. Posons pour tous $i \geq 1$ et tous $t \geq 0$, $K_i(t) = K_{p_i,q_i}^t(\theta_i)$, $\gamma_i(t) = K_i(t).w(\alpha_i - \sigma(3^t))$ et $v = (\prod_{i=1}^{i=d-1} \gamma_i(t_i)).K_d(t_d)$ et montrons pour commencer que $v \in B_{|v|}$. Posons pour tous $i \in [\![1,d]\!]$, $l_i = |K_i(t_i)|$. D'après (P3.2), $K_i(t_i) \in B_{l_i}$ et $\sum_{a=1}^{a=l_i} K_i(t_i)(a) \geq \sigma(3^{t_i})$. Par conséquent, $\sum_{a=1}^{a=l_i+1} (\gamma_i(t_i))(a) \geq \alpha_i$ pour tous $i \in [\![1,d-1]\!]$. On en déduit que pour tous $j \in [\![1,d-1]\!]$, $\sum_{a=1}^{a=\sum_{i=1}^{i=j} l_i+1} (\prod_{i=1}^{i=d-1} \gamma_i(t_i))(a) \geq \sum_{i=1}^{i=j} \alpha_i > 0$ car $w(\alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1}) \in B_{d-1}$. Autrement dit, pour tous $j \in [\![1,d-1]\!]$, $\sum_{a=1}^{a=\sum_{i=1}^{i=j} l_i+1} v(a) > 0$. Par suite, $v \in B_{|v|}$ puisque pour tous $i \in [\![1,d]\!]$, $K_i(t_i) \in B_{l_i}$. Par conséquent, $y = \varphi(v)$ impair d'après (P3.1).

On a alors :

$$\begin{aligned}
f(y) &= 2^{-1}\varphi(w(0).F(v).w(1)) && \text{(P3.3.6)}\\
&= 2^{-1}\varphi(w(0).F((\textstyle\prod_{i=1}^{i=d-1}\gamma_i(t_i)).K_d(t_d)).w(1)) && \text{(définition de } v)\\
&= 2^{-1}\varphi(w(0).(\textstyle\prod_{i=1}^{i=d-1}F(\gamma_i(t_i))).F(K_d(t_d)).w(1)) && \text{(P3.3.1)}\\
&= 2^{-1}\varphi(w(0).(\textstyle\prod_{i=1}^{i=d-1}F(\gamma_i(t_i))).K_d(t_d+1)) && \text{(P3.3.4 et P2.3.5)}\\
&= 2^{-1}\varphi(w(0).(\textstyle\prod_{i=1}^{i=d-1}\gamma_i(t_i+1)).K_d(t_d+1)) && \text{(P3.3.3)}\\
&= 2^{-1}\varphi(w(0).[\textstyle\prod_{i=1}^{i=d-1}K_i(t_i+1).w(\alpha_i-\sigma(3^{t_i+1}))].K_d(t_d+1))\\
& && \text{(définition de } \gamma_i)\\
&= 2^{-1}\varphi(w(0).[\textstyle\prod_{i=1}^{i=d-1}K_{p_i,q_i}^{t_i+1}(\theta_i).w(\alpha_i-\sigma(3^{t_i+1}))].K_{p_d,q_d}^{t_d+1}(\theta_d))\\
& && \text{(définition de } K_i)
\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.3. ***Generalized compact derivation***
Soit $d \geq 2$ et soit $y \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe :

— $w(\alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1}) \in B_{d-1}$
— $\theta_2, \ldots, \theta_d \in 2\mathbb{N}+1$
— $(p_i)_{2\leq i\leq d}$, $(q_i)_{2\leq i\leq d}$ *deux suites à valeurs dans* $\mathbb{N}^*$ *telles que* $p_i, q_i \leq \lambda(\theta_i)$
— $(t_i)_{2\leq i\leq d}$ *une suite à valeurs dans* $\mathbb{N}$
— $y = \varphi(w(\alpha_1).[\prod_{i=2}^{i=d-1} K_{p_i,q_i}^{t_i}(\theta_i).w(\alpha_i - \sigma(3^{t_i}))].K_{p_d,q_d}^{t_d}(\theta_d))$

Alors y est impair et on a :

$$f(y) = 2\varphi(w(\alpha_1-2).[\textstyle\prod_{i=2}^{i=d-1} K_{p_i,q_i}^{t_i+1}(\theta_i).w(\alpha_i-\sigma(3^{t_i+1}))].K_{p_d,q_d}^{t_d+1}(\theta_d))$$

Démonstration. Soient $\theta_1 \in 2\mathbb{N}+1$, $t_1 = 0$, $p_1, q_1 \in \mathbb{N}^*$, $p_1 > q_1$. On a $K_{p_1,q_1}^{t_1}(\theta_1) = W(3^{t_1}) = W(3^0) = e_w$ et $\sigma(3^{t_1}) = 0$. Par conséquent, $K_{p_1,q_1}^{t_1}(\theta_1).w(\alpha_1 - \sigma(3^{t_1})) = w(\alpha_1)$.
Posons $\Gamma_{n_1}^{n_2} = \prod_{i=n_1}^{i=n_2} K_{p_i,q_i}^{t_i+1}(\theta_i).w(\alpha_i - \sigma(3^{t_i+1}))$ si $n_1 \leq n_2$ et $\Gamma_{n_1}^{n_2} = e_w$ sinon. D'après le théorème de la dérivation compacte généralisée (T3.2) :

$$\begin{aligned}
f(y) &= 2^{-1}\varphi(w(0).\Gamma_1^{d-1}.K_{p_d,q_d}^{t_d+1}(\theta_d))\\
&= 2^{-1}\varphi(w(0).W(3^1).w(\alpha_1-\sigma(3^1)).\Gamma_2^{d-1}.K_{p_d,q_d}^{t_d+1}(\theta_d)) && (t_1 = 0 \text{ et } p_1 > q_1)\\
&= 2^{-1}\varphi(w(0,1,\alpha_1-1).\Gamma_2^{d-1}.K_{p_d,q_d}^{t_d+1}(\theta_d)) && (W(3) = w(1))\\
&= 2^1\varphi(w(\alpha_1-2).\Gamma_2^{d-1}.K_{p_d,q_d}^{t_d+1}(\theta_d)) && \text{(P3.3.5)}
\end{aligned}$$

On reprend la la définition de $\Gamma_{n_1}^{n_2}$ pour conclure la démonstration. □

Corollaire 3.4. ***Compact derivation***
Soient x impair, $t \in \mathbb{N}$, $p, d \geq 1$ tels qu'il existe $w(\alpha_1, ..., \alpha_d) \in B_d$. On a :

$$f(\varphi((\prod_{i=1}^{i=d} w(\alpha_i)).K_p^t(x))) = 2\varphi(w(\alpha_1-2).(\prod_{i=2}^{i=d} w(1,\alpha_i-1)).K_p^{t+1}(x))$$

Démonstration. Posons $d^{'} = d+1$, pour tous $i \in [\![1, d^{'}-1]\!]$, $t_i = 0$ et $\theta_i = 1$. Posons enfin, $\theta_{d'} = x$, $t_{d'} = t$, $p_{d'} = p$ et $q_{d'} = \lambda(x)$. Pour tous $i \in [\![1, d^{'}-1]\!]$, comme $\mathring{\theta}_i = \emptyset$, $K^{t_i}_{p_i,q_i}(\theta_i) = W(3^{t_i}) = W(1) = e_w$ et $w(\alpha_i - \sigma(3^{t_i})) = w(\alpha_i)$. Posons $y = \varphi((\prod_{i=1}^{i=d} w(\alpha_i)).K^t_p(x))$. On a :

$$\begin{aligned}
f(y) &= (f\circ\varphi)(w(\alpha_1).(\textstyle\prod_{i=2}^{i=d^{'}-1} w(\alpha_i)).K^t_p(x)) && \text{(définition de } y \text{ et } d^{'}) \\
&= (f\circ\varphi)(w(\alpha_1).[\textstyle\prod_{i=2}^{i=d^{'}-1} K^{t_i}_{p_i,q_i}(\theta_i).w(\alpha_i - \sigma(3^{t_i}))].K^{t_{d'}}_{p_{d'},q_{d'}}(\theta_{d'})) \\
& && \text{(cf. ci-dessus)} \\
&= 2\varphi(w(\alpha_1 - 2).[\textstyle\prod_{i=2}^{i=d^{'}-1} K^{t_i+1}_{p_i,q_i}(\theta_i).w(\alpha_i - \sigma(3^{t_i+1}))].K^{t_{d'}+1}_{p_{d'},q_{d'}}(\theta_{d'})) \\
& && \text{(C3.3)} \\
&= 2\varphi(w(\alpha_1 - 2).[\textstyle\prod_{i=2}^{i=d^{'}-1} W(3^{t_i+1}).w(\alpha_i - \sigma(3^{t_i+1}))].K^{t+1}_p(x)) \\
& && (\theta_i = 1 \text{ si } i < d^{'},\ \theta_{d'} = x,\ t_{d'} = t,\ p_{d'} = p,\ q_{d'} = \lambda(x)) \\
&= 2\varphi(w(\alpha_1 - 2).[\textstyle\prod_{i=2}^{i=d} w(1, \alpha_i - 1)].K^{t+1}_p(x)) && (t_i = 0 \text{ et } d^{'} = d+1)
\end{aligned}$$

S'en est donc terminé pour ce petit jeu d'écriture. □

3.3 σ-stability of K^t_p

3.3.1 σ-stability with a letter

Notation 3.3. Majorants M_n, pivot $\pi(\beta, v)$, Bornants Q_β, Limiteurs L_β, reste $\rho(\beta, v)$
- Soit $n \geq 0$, on pose $M_n = \{v \in \Omega^*(\mathbb{N}^*) | n \leq |v|, \exists i \in]\!]n, |v|]\!], v(i) > 1\}$. On dit que les éléments de M_n majorent n ;
- Soient $\beta \geq 0$ et $v \in \Omega(\mathbb{N}^*)$, on pose $U(\beta, v) = \{j \in \mathbb{N}^* | j \leq |v|, \beta \leq \sum_{i=1}^{i=j} v(i)\}$;
- Soient $v \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$ et $\beta \leq (\sigma\circ\varphi)(v)$, on pose $\pi(\beta, v) = min(U(\beta, v))$ et on dit que $\pi(\beta, v)$ est le pivot de β dans v ;
- Soient $v \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$ et $\beta \leq (\sigma\circ\varphi)(v)$, on pose $\rho(\beta, v) = (\sum_{i=1}^{i=\pi(\beta,v)} v(i)) - \beta$ et on dit que $\rho(\beta, v)$ est le reste de v privé de β ;
- On pose $Q_\beta = \{v \in \Omega(\mathbb{N}^*) | (\beta < (\sigma\circ\varphi)(v) \textit{ et } v \in M_{\pi(\beta,v)}) \textit{ ou } \beta + 1 < \sum_{i=1}^{i=\pi(\beta,v)} v(i)\}$. On peut de façon imagée dire que Q_β est l'ensemble des mots qui ne sont pas "écrasés" par β ;
- Soit $\beta \in \mathbb{N}$, on note L_β l'ensemble défini par :

$$L_\beta = \{v \in \Omega(\mathbb{N}^*) | \beta < (\sigma\circ\varphi)(v) - 1 \text{ et } v(|v|) > 1\}$$

Proposition 3.4. $L_\beta \subset Q_\beta$
Pour tous $\beta \geq 0$ on a $L_\beta \subset Q_\beta$ et $L_\beta = \{v \in Q_\beta | v(|v|) > 1\}$.

Démonstration. Soient $\beta \geq 0$, $v \in L_\beta$.
Si $\pi(\beta, v) = |v|$ alors $\sum_{i=1}^{i=\pi(\beta,v)} v(i) = (\sigma\circ\varphi)(v) > \beta + 1$ donc $v \in Q_{\pi(\beta,v)}$. Si au contraire $\pi(\beta, v) < |v|$ alors comme $v(|v|) > 1$, il existe $i_1 > \pi(\beta, v)$ tel que $v(i_1) > 1$ par conséquent, là encore $v \in Q_{\pi(\beta,v)}$. D'où $L_\beta \subseteq Q_\beta$. Si maintenant $v \in L_\beta$ alors $v, v.w(1) \in Q_\beta$ mais $v.w(1) \notin L_\beta$, on a donc $L_\beta \subset Q_\beta$.
Passons à la seconde affirmation. Soit $v \in L_\beta$, d'après ce qui précède $v \in Q_\beta$ et

par définition de L_β, $v(|v|) > 1$ donc $v \in \{v \in Q_\beta | v(|v|) > 1\}$. Inversement, soit $v \in Q_\beta$ tel que $v(|v|) > 1$ alors ou bien $\beta + 1 < \sum_{i=1}^{\pi(\beta,v)} v(i)$ et alors $v \in L_\beta$ ou bien $((\sigma \circ \varphi)(v) > \beta$ et $v \in M_{\pi(\beta,v)})$. Dans ce dernier cas, il existe alors $i_1 > \pi(\beta, v)$ tel que $v(i_1) > 1$. On a alors $(\sigma \circ \varphi)(v) \geq v(i_1) + \sum_{i=1}^{i=\pi(\beta,v)} v(i) > 1 + \beta$. Par conséquent, on a encore $v \in L_\beta$. □

Lemme 3.5. ***Left product in*** $\mathbb{Z}$
Soient $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\beta \in \mathbb{N}$, $c \in M_0$, $d \in \Omega(\mathbb{Z})$ tels que $\beta \leq (\sigma \circ \varphi)(c)$.
Alors il existe $\alpha^{'} \in \mathbb{N}^*$, $\gamma_1 \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$, $\gamma_2 \in \Omega(\mathbb{N}^*) \cup \{w(0)\}$ tels que :

1. $w(\alpha).w(-\beta).c.d \equiv w(\alpha^{'} - \beta).\gamma_1.\gamma_2.d$
2. $\beta \leq (\sigma \circ \varphi)(\gamma_1)$ *et si* $\beta < (\sigma \circ \varphi)(c)$, $\beta < (\sigma \circ \varphi)(\gamma_1)$
3. $(\sigma \circ \varphi)(\gamma_1.\gamma_2) = (\sigma \circ \varphi)(c) + \alpha - \alpha^{'} + \mathbb{1}_{\{w(0)\}}(\gamma_2)$
4. *Si* $\beta = 0$: $\gamma_2 \neq w(0)$
5. *Si* $\beta > 0$:
   (a) $\alpha^{'} = \alpha$
   (b) *Si* $[(c \in Q_\beta$ *et* $\rho(\beta, c) \neq 0)$ *ou* $(\rho(\beta, c) > 1)$
   ou $(\rho(\beta, c) = 0$ *et* $(\sigma \circ \varphi)(c) > \beta + 1)]$ ***alors*** $\gamma_1 \in L_\beta$
   (c) *Si* $\rho(\beta, c) = 0$ *et si* $\beta < (\sigma \circ \varphi)(c)$ ***alors*** $\gamma_1(|\gamma_1|) > 1$
   (d) *Si* $(c \in Q_\beta$ *ou* $\rho(\beta, c) \neq 0)$ ***alors*** $\gamma_2 \neq w(0)$
   (e) *Si* $(c \in L_\beta$ *et* $\rho(\beta, c) \neq 0)$ ***alors*** $\gamma_2 = e_w$
   (f) *Si* $\gamma_2 \neq w(0)$ ***alors*** $(c \in Q_\beta$ *ou* $\rho(\beta, c) \neq 0)$
   (g) *Si* $(\sigma \circ \varphi)(c) = \beta$ ***alors*** $\gamma_1 = c$

Démonstration. Soient $r \in \mathbb{N}^*$, $c_1, ..., c_r \in \mathbb{N}^*$ tels que $c = \prod_{i=1}^{i=r} w(c_i)$. On a $r \geq 1$ car $(\sigma \circ \varphi)(c) > 1$.

Si $\beta = 0$:
Comme $c \in M_0$, il existe donc $i_1 \leq r$ tel que pour $c_i = 1$ pour tous $i < i_1$ et $c(i_1) > 1$. On a :

$$\begin{aligned} w(\alpha).w(-\beta).c.d &= w(\alpha - \beta).w(0).(\textstyle\prod_{i=1}^{i=i_1-1} w(1)).w(c_{i_1}).\prod_{i=i_1+1}^{i=r} w(c_i).d \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{car } \beta = 0) \\ &\equiv w(\alpha - \beta + i_1).w(c_{i_1} - 1).\textstyle\prod_{i=i_1+1}^{i=r} w(c_i).d \qquad (\text{P2.2}) \end{aligned}$$

Dans ce cas, on pose $\alpha^{'} = \alpha + i_1$, $\gamma_1 = w(c_{i_1} - 1).\prod_{i=i_1+1}^{i=r} w(c_i)$ et $\gamma_2 = e_w$. On a :

$$\begin{aligned} \alpha^{'} + (\sigma \circ \varphi)(\gamma_1) &= \alpha + i_1 - 1 + \textstyle\sum_{i=i_1}^{i=r} c_i \\ &= \alpha + \textstyle\sum_{i=1}^{i=r} c_i \qquad (\text{car } c_i = 1 \text{ pour } i \in [\![1, i_1[\![) \\ &= \alpha + (\sigma \circ \varphi)(c) \end{aligned}$$

De plus, $(\sigma \circ \varphi)(\gamma_1) > \beta$ car $\gamma_1 \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$ et $\beta = 0$.

Si $\beta > 0$:
Comme $0 < \beta \leq (\sigma \circ \varphi)(c)$, posons $i_0 = \pi(\beta, c)$, on a $\beta \leq \sum_{i=1}^{i=i_0} c_i$. Posons également $\gamma_0 = w(\beta - \sum_{i=1}^{i=i_0-1} c_i).w(\sum_{i=1}^{i=i_0} c_i - \beta)$. Comme $1 \leq i_0 \leq r \neq 0$, on

a d'après la proposition de grande dilution ($P2.4$), avec les mêmes conventions sur les bornes :

$$w(\alpha).w(-\beta).c.d \equiv w(\alpha-\beta).(\prod_{i=1}^{i=i_0-1} w(c_i)).\gamma_0.(\prod_{i=i_0+1}^{i=r} w(c_i)).d$$

Par définition de i_0, $\sum_{i=1}^{i=i_0-1} c_i < \beta \leq \sum_{i=1}^{i=i_0} c_i$ car $i_0 = min(U(\beta,c))$ et $c_{i_0} > 0$. Par conséquent, $\gamma_0 \in \Omega(\mathbb{N})$. Posons $\alpha^{'} = \alpha$, le point (5a) sera alors vérifié ; reste donc à extraire γ_1 et γ_2 satisfaisant les propriétés énoncées. Notons que par définition, $\rho(\beta,c) = \sum_{i=1}^{i=i_0} c_i - \beta$.

1. <u>Si $\sum_{i=1}^{i=i_0} c_i - \beta = 0$ et $c \notin Q_\beta$:</u>
   Comme $c \notin Q_\beta$, $\forall i > i_0,\ c_i = 1$. Par suite :

$$\begin{aligned}\gamma_0.(\textstyle\prod_{i=i_0+1}^{i=r} w(c_i)).d &= \gamma_0.w(1)^{r-i_0}.d \\ &= w(c_{i_0}).w(0).w(1)^{r-i_0}.d \quad (\text{car } \textstyle\sum_{i=1}^{i=i_0} c_i - \beta = 0) \\ &\equiv w(c_{i_0}+r-i_0).w(0).d \quad (\text{P2.2})\end{aligned}$$

   Posons $\gamma_1 = (\prod_{i=1}^{i=i_0-1} w(c_i)).w(c_{i_0}+r-i_0)$ et $\gamma_2 = w(0)$. Vérifions qu'ils ont toutes les propriétés requises.
   Nous avons d'après la propriété de l'équivalence à droite ($P2.3.5$) :

$$w(\alpha).w(-\beta).c.d \equiv w(\alpha^{'}-\beta).\gamma_1.\gamma_2.d$$

   Comme $i_0 \leq r$ et $c \in \Omega(\mathbb{N}^*)$, $\gamma_1 \in \Omega(\mathbb{N}^*)$. De plus :

$$\begin{aligned}(\sigma\circ\varphi)(\gamma_1) &= (\sigma\circ\varphi)((\textstyle\prod_{i=1}^{i=i_0-1} w(c_i)).w(c_{i_0}+r-i_0)) \\ &= (\textstyle\sum_{i=1}^{i=i_0-1} c_i) + c_{i_0} + r - i_0 \quad (\text{P2.3.12}) \\ &= (\textstyle\sum_{i=1}^{i=i_0} c_i) + r - i_0 \quad (\text{car } \textstyle\sum_{i=1}^{i=i_0} c_i - \beta = 0) \\ &= (\textstyle\sum_{i=1}^{i=r} c_i) \quad (\text{car } \forall i > i_0,\ c_i = 1) \\ &= (\sigma\circ\varphi)(c) + (\alpha - \alpha^{'}) \quad (\alpha = \alpha^{'})\end{aligned}$$

   On en déduit, d'après (P2.5.2), $(\sigma\circ\varphi)(\gamma_1.\gamma_2) = (\sigma\circ\varphi)(c) + \alpha - \alpha^{'} + 1$ et $(\sigma\circ\varphi)(\gamma_1) = (\sigma\circ\varphi)(c)$, d'où (2).
   Si $(\sigma\circ\varphi)(c) > \beta$ et $\sum_{i=1}^{i=i_0} c_i - \beta = 0$, $i_0 < r$ et alors $\gamma_1(|\gamma_1|) = c_{i_0} + r - i_0 > 1$.
   Si $(\sigma\circ\varphi)(c) > \beta + 1$:

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{i=1}^{i=\pi(\beta,\gamma_1)} \gamma_1(i) &= \textstyle\sum_{i=1}^{i=i_0} \gamma_1(i) \quad (\text{car } \pi(\beta,\gamma_1) = i_0) \\ &= (\sigma\circ\varphi)(\gamma_1) \quad (\text{car } |\gamma_1| = i_0) \\ &= (\sigma\circ\varphi)(c) \quad (\text{cf. plus haut}) \\ &> \beta + 1 \quad (\text{par hypothèse})\end{aligned}$$

   Par conséquent, si $(\sigma\circ\varphi)(c) > \beta + 1$, $\gamma_1 \in L_\beta$ puisque $\gamma_1(|\gamma_1|) > 1$.
   Enfin, comme $c \notin Q_\beta$, $c \notin L_\beta$ et par suite, on constate que les points (5b) à (5e) sont vérifiés. On note de plus que si $(\sigma\circ\varphi)(c) = \beta$ (qu'on ne peut avoir que si $\sum_{i=1}^{i=i_0} c_i - \beta = 0$ et $c \notin Q_\beta$) alors $i_0 = r$ et également $\gamma_1 = c$ (5g).

2. <u>Si $\sum_{i=1}^{i=i_0} c_i - \beta = 1$ et $c \notin Q_\beta$:</u>
   Comme $c \notin Q_\beta$, $\forall i > i_0$, $c_i = 1$. Par suite :

$$\begin{aligned}\gamma_0.(\prod_{i=i_0+1}^{i=r} w(c_i)).d &= \gamma_0.w(1)^{r-i_0}.d \\ &= w(\beta - \sum_{i=1}^{i=i_0-1} c_i).w(1)^{r-i_0+1}.d \\ &\qquad (\text{car } \sum_{i=1}^{i=i_0} c_i - \beta = 1)\end{aligned}$$

   Posons $\gamma_1 = (\prod_{i=1}^{i=i_0-1} w(c_i)).w(\beta - \sum_{i=1}^{i=i_0-1} c_i).w(1)^{r-i_0+1}$ et $\gamma_2 = e_w$. Vérifions qu'ils ont toutes les propriétés requises. Nous avons :

$$w(\alpha).w(-\beta).c.d \equiv w(\alpha' - \beta).\gamma_1.\gamma_2.d$$

   De plus :

$$\begin{aligned}(\sigma \circ \varphi)(\gamma_1) &= (\sigma \circ \varphi)((\prod_{i=1}^{i=i_0-1} w(c_i)).w(\beta - \sum_{i=1}^{i=i_0-1} c_i).w(1)^{r-i_0+1}) \\ &= (\sum_{i=1}^{i=i_0-1} c_i) + \beta - (\sum_{i=1}^{i=i_0-1} c_i) + r - i_0 + 1 \qquad (\text{P2.3.12}) \\ &= (\sum_{i=1}^{i=i_0} c_i) + r - i_0 \qquad (\text{car } \sum_{i=1}^{i=i_0} c_i - \beta = 1) \\ &= (\sum_{i=1}^{i=r} c_i) \qquad (\text{car } \forall i > i_0,\ c_i = 1) \\ &= (\sigma \circ \varphi)(c) + (\alpha - \alpha') \qquad (\alpha = \alpha')\end{aligned}$$

   On en tire également $(\sigma \circ \varphi)(\gamma_1) = (\sigma \circ \varphi)(c)$ d'où (2).
   Enfin, par construction $\pi(\beta, \gamma_1) = i_0 + 1$ mais comme pour tous $i > i_0$ $\gamma_1(i) = 1$, $\gamma_1 \notin M_{i_0+1}$ par conséquent $\gamma_1 \notin Q_\beta$.
   Les points (5b) à (5e) sont vérifiés car leurs préconditions ne sont pas remplies.

3. <u>Si $\sum_{i=1}^{i=i_0} c_i - \beta > 1$:</u>
   (a) <u>Si $c \notin L_\beta$</u>
   Posons $\gamma_1 = (\prod_{i=1}^{i=i_0-1} w(c_i)).\gamma_0$, $\gamma_2 = (\prod_{i=i_0+1}^{i=r} w(c_i))$.
   On a $\gamma_1(|\gamma_1|) > 1$ car $\gamma_1(|\gamma_1|) = \gamma_0(|\gamma_0|) = \sum_{i=1}^{i=i_0} c_i - \beta$.
   (b) <u>Si $c \in L_\beta$</u>
   Posons $\gamma_1 = (\prod_{i=1}^{i=i_0-1} w(c_i)).\gamma_0.(\prod_{i=i_0+1}^{i=r} w(c_i))$, $\gamma_2 = e_w$.
   On a $\gamma_1(|\gamma_1|) > 1$ car $\gamma_1(|\gamma_1|) = c(|c|)$ et $c \in L_\beta$.

   Dans chaque cas, on a les propriétés suivantes :
   $(\sigma \circ \varphi)(\gamma_1.\gamma_2) = (\sigma \circ \varphi)(c) > \beta$, $\pi(\beta, \gamma_1) = i_0 + 1$. Comme $(\sigma \circ \varphi)(\gamma_1) \geq \sum_{i=1}^{i=i_0+1} \gamma_1(i) = \sum_{i=1}^{i=i_0} c_i > \beta + 1$, $\gamma_1 \in Q_\beta$. Enfin comme $\gamma_1(|\gamma_1|) > 1$, on a aussi $\gamma_1 \in L_\beta$. L'ensemble des points sont alors validés jusqu'à (5e).

4. <u>Si $c \in Q_\beta$:</u>
   Comme $c \in Q_\beta$, ou bien $\sum_{i=1}^{i=i_0} c_i - \beta > 1$ ce qui a déjà été traité dans le cas précédent ou bien il existe $i_1 \in]\!]i_0, r]\!]$ tel que $c_{i_1} > 1$.
   Supposons donc qu'il existe $i_1 \in]\!]i_0, r]\!]$ tel que $c_{i_1} > 1$ et choisissons i_1 tel que pour tous $i \in]\!]i_0, i_1[\![$, $c_i = 1$ et $c_{i_1} > 1$.
   Il faut traiter les sous-cas $\sum_{i=1}^{i=i_0} c_i - \beta = 1$ et $\sum_{i=1}^{i=i_0} c_i - \beta = 0$.
   (a) <u>Si $\sum_{i=1}^{i=i_0} c_i - \beta = 0$:</u>

Posons $C = \gamma_0.(\prod_{i=i_0+1}^{i=r} w(c_i)).d$. On a :

$$\begin{aligned} C &= w(c_{i_0}).w(0).(\prod_{i=i_0+1}^{i=r} w(c_i)).d \\ &= w(c_{i_0}).w(0).w(1)^{(i_1-1)-(i_0+1)+1}.w(c_{i_1}).(\prod_{i=i_1+1}^{i=r} w(c_i)).d \\ &\equiv w(c_{i_0}+i_1-i_0).w(c_{i_1}-1).(\prod_{i=i_1+1}^{i=r} w(c_i)).d \qquad \text{(P2.2)} \end{aligned}$$

Posons $\gamma_1 = (\prod_{i=1}^{i=i_0-1} w(c_i)).w(c_{i_0}+i_1-i_0)$ et
$\gamma_2 = w(c_{i_1}-1).\prod_{i=i_1+1}^{i=r} w(c_i)$. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} w(\alpha).w(-\beta).c.d &\equiv w(\alpha-\beta).(\prod_{i=1}^{i=i_0-1} w(c_i)).C \qquad \text{(P2.3.5)} \\ &\equiv w(\alpha-\beta).(\prod_{i=1}^{i=i_0-1} w(c_i)).w(c_{i_0}+i_1-i_0).\gamma_2.d \\ &\equiv w(\alpha-\beta).\gamma_1.\gamma_2.d \end{aligned}$$

Puisque $c_{i_0} > 0$, $c_{i_1} > 1$ et $i_1 > i_0$ on a $\gamma_1 \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ et :

$$\begin{aligned} (\sigma\circ\varphi)(\gamma_1.\gamma_2) &= (\sum_{i=1}^{i=i_0-1} c_i) + c_{i_0} + i_1 - i_0 + c_{i_1} - 1 + \sum_{i=i_1+1}^{i=r} c_i \\ &= \sum_{i=1}^{i=r} c_i \qquad \text{(car } c_i = 1 \text{ pour } i \in]\!]i_0, i_1[\![) \\ &= (\sigma\circ\varphi)(c) \end{aligned}$$

Enfin, par construction $\pi(\beta,\gamma_1) = i_0$ et $(\sigma\circ\varphi)(\gamma_1) = \sum_{i=1}^{i=i_0}\gamma_1(i) = \sum_{i=1}^{i=i_0} c_i + (i_1-i_0) = \beta + (i_1 - i_0) > \beta$ car $i_1 > i_0$. Par conséquent, toutes les propriétés sont validées jusqu'à (5f).

(b) Si $\sum_{i=1}^{i=i_0} c_i - \beta = 1$:
Dans ce cas : $\gamma_0 = w(\beta - \sum_{i=1}^{i=i_0-1} c_i).w(\sum_{i=1}^{i=i_0} c_i - \beta) = w(\beta - \sum_{i=1}^{i=i_0-1} c_i).w(1)$. Comme $\beta - \sum_{i=1}^{i=i_0-1} c_i > 0$ on a $\gamma_0 \in \Omega(\mathbb{N}^*)$.

i. Si $c \notin L_\beta$:
On pose $\gamma_1 = (\prod_{i=1}^{i=i_0-1} w(c_i)).\gamma_0.(\prod_{i=i_0+1}^{i=i_1} w(c_i))$ et
$\gamma_2 = \prod_{i=i_1+1}^{i=r} w(c_i)$.
On a $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ car $\gamma_0, c \in \Omega(\mathbb{N}^*)$. De plus, $w(\alpha,-\beta).c.d \equiv w(\alpha-\beta).\gamma_1.\gamma_2.d$. Par ailleurs :

$$\begin{aligned} (\sigma\circ\varphi)(\gamma_1) &= (\sum_{i=1}^{i=i_0-1} c_i) + (\sigma\circ\varphi)(\gamma_0) + (\sum_{i=i_0+1}^{i=i_1} c_i) \\ &\qquad \text{(P2.3.12 et définition de } \gamma_1) \\ &= (\sum_{i=1}^{i=i_0-1} c_i) + c_{i_0} + (\sum_{i=i_0+1}^{i=i_1} c_i) \\ &\qquad \text{(P2.3.12 et définition de } \gamma_0) \\ &= \sum_{i=1}^{i=i_1} c_i \\ &> \sum_{i=1}^{i=i_0} c_i \qquad (i_1 > i_0) \\ &> \beta + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sigma\circ\varphi)(\gamma_1.\gamma_2) &= (\sum_{i=1}^{i=i_1} c_i) + (\sum_{i=i_1+1}^{i=r} c_i) \\ &\qquad \text{(P2.3.12 et définition de } \gamma_1, \gamma_2) \\ &= (\sigma\circ\varphi)(c) \end{aligned}$$

Enfin, $\gamma_1(|\gamma_1|) = \gamma_1(i_1+1) = c(i_1) > 1$ et en conséquence, on a $\gamma_1 \in L_\beta \subset Q_\beta$. Toutes les propriétés sont alors vérifiées.

ii. <u>Si $c \in L_\beta$:</u>
On pose $\gamma_1 = (\prod_{i=1}^{i=i_0-1} w(c_i)).\gamma_0.(\prod_{i=i_0+1}^{i=r} w(c_i))$ et $\gamma_2 = e_w$. On a comme ci-dessus $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ car $\gamma_0, c \in \Omega(\mathbb{N}^*)$. De plus, $w(\alpha, -\beta).c.d \equiv w(\alpha - \beta).\gamma_1.\gamma_2.d$. Par ailleurs :

$$\begin{aligned}(\sigma \circ \varphi)(\gamma_1) &= (\textstyle\sum_{i=1}^{i=i_0-1} c_i) + (\sigma \circ \varphi)(\gamma_0) + (\sum_{i=i_0+1}^{i=r} c_i) \\ &\qquad \text{(P2.3.12 et définition de } \gamma_1\text{)} \\ &= (\textstyle\sum_{i=1}^{i=i_0-1} c_i) + c_{i_0} + (\sum_{i=i_0+1}^{i=r} c_i) \\ &\qquad \text{(P2.3.12 et définition de } \gamma_0\text{)} \\ &= (\sigma \circ \varphi)(c) \\ &> \beta + 1 \qquad \text{(car } c \in L_\beta\text{)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\sigma \circ \varphi)(\gamma_1.\gamma_2) &= (\sigma \circ \varphi)(c) + (\sigma \circ \varphi)(e_w) \\ &\qquad \text{(définition de } \gamma_1 \text{ et } \gamma_2\text{)} \\ &= (\sigma \circ \varphi)(c)\end{aligned}$$

Enfin, $\gamma_1(|\gamma_1|) = \gamma_1(r+1) = c(r) > 1$ et en conséquence, on a $\gamma_1 \in L_\beta \subset Q_\beta$. Toutes les propriétés sont alors vérifiées.

On note que (5f) est bien vérifiée car $(\sum_{i=1}^{i=i_0} c_i - \beta = 0$ et $c \notin Q_\beta)$ est le seul cas où $\gamma_2 = w(0)$. C'est aussi le seul cas où $(\sigma \circ \varphi)(c) = \beta$ donc (5g) est vérifiée. □

Corollaire 3.6. ***Left product in*** $\mathbb{Z}$
Soient $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\beta \in \mathbb{N}$, $c \in L_\beta$, $d \in \Omega(\mathbb{Z})$. Alors il existe $\alpha' \in \mathbb{N}^*$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ tels que :

1. $w(\alpha).w(-\beta).c.d \equiv w(\alpha' - \beta).\gamma_1.\gamma_2.d$
2. $\beta < (\sigma \circ \varphi)(\gamma_1)$
3. $(\sigma \circ \varphi)(\gamma_1) + (\sigma \circ \varphi)(\gamma_2) = (\sigma \circ \varphi)(c) + \alpha - \alpha'$
4. *Si* $\beta > 0$: $\alpha = \alpha'$
5. *Si* $\beta > 0$: $\gamma_1(|\gamma_1|) > 1$

Démonstration. Comme $c \in L_\beta$, $(\sigma \circ \varphi)(c) > \beta + 1$ et $c(|c|) > 1$. Si $\beta = 0$, il suffit de reprendre les conclusions du lemme précédent (L3.5). Supposons à présent $\beta > 0$, ce qui implique toujours d'après le lemme (L3.5), que les points (1), (2) et (4) soient immédiatement vérifiés. Reste à voir que $\gamma_2 \neq w(0)$ pour vérifier (3) et montrer que $\gamma_1(|\gamma_1|) > 1$.
Comme $c \in L_\beta$, d'après (P3.4), $c \in Q_\beta$, on en déduit déjà d'après $(L3.5.5.d)$ que $\gamma_2 \neq w(0)$. De plus par définition de L_β, $(\sigma \circ \varphi)(c) > \beta + 1$. On en déduit donc d'après $(L3.5.5.b)$ que $\gamma_1 \in L_\beta$ et donc $\gamma_1(|\gamma_1|) > 1$. □

3.3.2 σ-stability with a word

Lemme 3.7. ***Full left product in*** $\mathbb{Z}$ ***with*** $\beta = 0$
Soient $a \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$, $c \in M_0$ et $d \in \Omega(\mathbb{Z})$. Il existe alors $\rho \in L_0$ tel que :

1. $a.w(0).c.d \equiv \rho.d$
2. $(\sigma \circ \varphi)(\rho) = (\sigma \circ \varphi)(a) + (\sigma \circ \varphi)(c)$

Démonstration. Posons $\beta = 0$, $r = |a|$ et $a = \prod_{i=1}^{i=r} w(a_i)$. Comme $c \in M_0$, $(\sigma \circ \varphi)(c) > \beta$, $a_r > 0$, d'après le lemme du Left-$\mathbb{Z}$-produit (L3.5), il existe $\alpha^{'} \in \mathbb{N}^*$, $\gamma \in \Omega(\mathbb{N}^*)$, $\gamma^{'} \in \Omega(\mathbb{N}^*) \cup \{w(0)\}$ tels que :

$$\begin{array}{lr} (a) & w(a_r).w(-\beta).c.d \equiv w(\alpha^{'} - \beta).\gamma.\gamma^{'}.d \\ (b) & (\sigma \circ \varphi)(\gamma.\gamma^{'}) = (a_r - \alpha^{'}) + (\sigma \circ \varphi)(c) + \mathbb{1}_{\{w(0)\}}(\gamma^{'}) \\ (c) & \gamma^{'} \neq w(0) \end{array}$$

Posons $\rho = (\prod_{i=1}^{i=r-1} w(a_i)).w(\alpha^{'} - \beta).\gamma.\gamma^{'}$. D'après (a) et la propriété du produit à droite (P2.3.5), on a :

$$a.w(-\beta).c.d \equiv \rho.d$$

De plus :

$$\begin{aligned} (\sigma \circ \varphi)(\rho) &= (\sigma \circ \varphi)((\textstyle\prod_{i=1}^{i=r-1} w(a_i)).w(\alpha^{'} - \beta).\gamma.\gamma^{'}) \\ &= (\textstyle\sum_{i=1}^{i=r-1} w(a_i)) + (\alpha^{'} - \beta) + (\sigma \circ \varphi)(\gamma.\gamma^{'}) && \text{(P2.3.12)} \\ &= (\textstyle\sum_{i=1}^{i=r-1} w(a_i)) + (\alpha^{'} - \beta) + (a_r - \alpha^{'}) + (\sigma \circ \varphi)(c) \\ & && \text{((b) et (c) ci-dessus)} \\ &= (\sigma \circ \varphi)(a) - \beta + (\sigma \circ \varphi)(c) \end{aligned}$$

□

Lemme 3.8. ***Full left product in $\mathbb{Z}$ - termination***
Soient $\beta \in \mathbb{N}$, $a = \prod_{i=1}^{i=r} a_i \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$, $c \in \Omega(\mathbb{N}^*)$, $d \in \Omega(\mathbb{Z})$ et $i_0 = max(\{j \geq 1 | \beta \leq \sum_{i=j}^{i=r} a_i\})$ tels que $(\sigma \circ \varphi)(a) > \beta$. Posons $Z_0 = \{v \in \Omega(\mathbb{Z}) | \exists b \in \Omega(\mathbb{N}^*), v = b.w(0)\}$, $Z = \Omega(\mathbb{N}^*) \cup Z_0$ et $\beta_{i_0} = \beta - \sum_{i=i_0}^{i=r} a_i$.
__S'il existe__ $\gamma \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ et $\gamma^{'} \in Z$ tels que :

A.1) $a.w(-\beta).c.d \equiv (\prod_{i=1}^{i=i_0-1} w(a_i)).w(-\beta_{i_0}).\gamma.\gamma^{'}.d$

A.2) $(\sigma \circ \varphi)(\gamma.\gamma^{'}) = (\sigma \circ \varphi)(c) + \varepsilon(\gamma^{'})$

A.3) $\beta_{i_0} = 0 \Rightarrow \gamma \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$

A.4) $\gamma^{'} \in Z_0 \Rightarrow \gamma \in M_0$

A.5) $c \in L_\beta \Rightarrow (\gamma^{'} \notin Z_0$ *et* $\gamma \in L_{\beta_{i_0}})$

__Alors il existe__ $\gamma_1 \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$, $\gamma_2 \in \{w(0), e_w\}$ tels que :

B.1) $a.w(-\beta).c.d \equiv \gamma_1.\gamma_2.d$

B.2) $(\sigma \circ \varphi)(\gamma_1.\gamma_2) = (\sigma \circ \varphi)(a) - \beta + (\sigma \circ \varphi)(c) + \mathbb{1}_{\{w(0)\}}(\gamma_2)$

B.3) $c \in L_\beta \Rightarrow \gamma_2 \neq w(0)$

Démonstration. Commençons par noter que i_0 est bien défini car $(\sigma \circ \varphi)(a) > \beta$. De plus, par définition $\beta_{i_0} \leq 0$. Soient alors $\theta_1 \in \Omega(\mathbb{N}^*)$, $\theta_2 \in \{e_w, w(0)\}$ tels que $\gamma^{'} = \theta_1.\theta_2$.
<u>Si $\beta_{i_0} < 0$:</u>
Posons $\gamma_1 = (\prod_{i=1}^{i=i_0-1} w(a_i)).w(-\beta_{i_0}).\gamma.\theta_1 \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$ et $\gamma_2 = \theta_2 \in \{e_w, w(0)\}$. En utilisant, (A.5), on vérifie que la relation $(c \in L_\beta \Rightarrow \gamma_2 \neq w(0))$ est vraie.

De plus, on a bien $a.w(-\beta).c.d \equiv \gamma_1.\gamma_2.d$. Notons également que d'après (A.4), $\gamma.\gamma' \neq w(0)$. Enfin, on a :

$$
\begin{aligned}
(\sigma\circ\varphi)(\gamma_1.\gamma_2) &= (\textstyle\sum_{i=1}^{i=i_0-1} w(a_i)) - \beta_{i_0} + (\sigma\circ\varphi)(\gamma.\gamma') \\
&\hfill (\text{P2.5.4 car } \gamma.\gamma' \neq w(0)) \\
&= (\textstyle\sum_{i=1}^{i=i_0-1} w(a_i)) + ((\textstyle\sum_{i=i_0}^{i=r} a_i) - \beta) + (\sigma\circ\varphi)(\gamma.\gamma') \\
&\hfill (\text{définition de } \beta_{i_0}) \\
&= (\sigma\circ\varphi)(a) - \beta + (\sigma\circ\varphi)(c) + \varepsilon(\gamma') \qquad (\text{A.2}) \\
&= (\sigma\circ\varphi)(a) - \beta + (\sigma\circ\varphi)(c) + \mathbb{1}_{\{w(0)\}}(\gamma_2) \\
&\hfill (\text{car } \gamma' = \theta_1.\gamma_2,\ \theta_1 \in \Omega(\mathbb{N}^*),\ \gamma_2 \in \{e_w, w(0)\})
\end{aligned}
$$

<u>Si $\beta_{i_0} = 0$:</u>
D'après (A.3), $\gamma \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$. Comme $\beta < \sum_{i=1}^{i=r} a_i$ et $\beta_{i_0} = \beta - \sum_{i=i_0}^{i=r} a_i = 0$, on en déduit $i_0 > 1$. On a :

— $a.w(-\beta).c.d \equiv (\prod_{i=1}^{i=i_0-1} w(a_i)).w(0).\gamma.\gamma'.d$

— $(\sigma\circ\varphi)(a) - \beta = \sum_{i=1}^{i=i_0-1} a_i$

1. <u>Si $\theta_2 = w(0)$:</u>
   Posons $\gamma_2 = \theta_2$. Pour les mêmes raisons que précédemment la relation ($c \in L_\beta \Rightarrow \gamma_2 \neq w(0)$) est vraie. De plus, d'après (A.4), $\gamma \in M_0$. Sous ces conditions, d'après (L3.7), il existe $\rho \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ tel que :
   — $(\prod_{i=1}^{i=i_0-1} w(a_i)).w(0).\gamma.(\gamma'.d) \equiv \rho.\gamma'.d$
   — $(\sigma\circ\varphi)(\rho) = (\sum_{i=1}^{i=i_0-1} w(a_i)) + (\sigma\circ\varphi)(\gamma)$
   Posons $\gamma_1 = \rho.\theta_1$. Nous avons $a.w(-\beta).c.d \equiv \rho.\theta_1.\theta_2.d = \gamma_1.\gamma_2.d$.
   De plus :

$$
\begin{aligned}
(\sigma\circ\varphi)(\gamma_1.\gamma_2) &= (\sigma\circ\varphi)(\rho.\theta_1.\theta_2) \\
&= (\sigma\circ\varphi)(\rho.\theta_1) + 1 \qquad (\text{P2.5.2 car } \rho \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)) \\
&= (\textstyle\sum_{i=1}^{i=i_0-1} w(a_i)) + (\sigma\circ\varphi)(\gamma) + (\sigma\circ\varphi)(\theta_1) + 1 \\
&\hfill (\text{cf. ci-dessus et P2.3.12}) \\
&= (\textstyle\sum_{i=1}^{i=i_0-1} w(a_i)) + (\sigma\circ\varphi)(\gamma.\theta_1) + 1 \qquad (\text{P2.3.12}) \\
&= (\sigma\circ\varphi)(a) - \beta + (\sigma\circ\varphi)(\gamma.\theta_1) + 1 \qquad (\beta_{i_0} = 0) \\
&= (\sigma\circ\varphi)(a) - \beta + (\sigma\circ\varphi)(\gamma.\gamma') \quad (\text{P2.5.2 car } \gamma \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)) \\
&= (\sigma\circ\varphi)(a) - \beta + (\sigma\circ\varphi)(c) + \varepsilon(\gamma') \qquad (\text{A.2}) \\
&= (\sigma\circ\varphi)(a) - \beta + (\sigma\circ\varphi)(c) + \mathbb{1}_{\{w(0)\}}(\gamma_2) \\
&\hfill (\text{car } \gamma' = \theta_1.\gamma_2,\ \theta_1 \in \Omega(\mathbb{N}^*),\ \gamma_2 \in \{e_w, w(0)\})
\end{aligned}
$$

2. <u>Si $\theta_2 \neq w(0)$ et $\gamma.\gamma' \in M_0$:</u>
   Posons $\gamma_2 = \theta_2$. Pour les mêmes raisons que précédemment la relation ($c \in L_\beta \Rightarrow \gamma_2 \neq w(0)$) est vraie. D'après (L3.7), il existe $\gamma_1 \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$ tel que :
   — $(\prod_{i=1}^{i=i_0-1} w(a_i)).w(0).\gamma.\gamma'.d \equiv \gamma_1.d$
   — $(\sigma\circ\varphi)(\gamma_1) = (\sum_{i=1}^{i=i_0-1} w(a_i)) + (\sigma\circ\varphi)(\gamma.\gamma')$

On a $a.w(-\beta).c.d \equiv \gamma_1.\gamma_2.d$ puisque $\gamma_2 = e_w$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
(\sigma \circ \varphi)(\gamma_1.\gamma_2) &= (\textstyle\sum_{i=1}^{i=i_0-1} w(a_i)) + (\sigma \circ \varphi)(\gamma.\gamma^{'}) && (\gamma_2 = e_w)\\
&= (\sigma \circ \varphi)(a) - \beta + (\sigma \circ \varphi)(\gamma.\gamma^{'}) && (\beta_{i_0} = 0)\\
&= (\sigma \circ \varphi)(a) - \beta + (\sigma \circ \varphi)(c) + \varepsilon(\gamma^{'}) && (\mathrm{A.2})\\
&= (\sigma \circ \varphi)(a) - \beta + (\sigma \circ \varphi)(c) + \mathbb{1}_{\{w(0)\}}(\gamma_2)\\
& && (\gamma^{'}, \gamma_2 \in \Omega(\mathbb{N}^*))
\end{aligned}$$

3. Si $\theta_2 \neq w(0)$ et $\gamma.\gamma^{'} \notin M_0$:
   Comme $\gamma.\gamma^{'} \notin M_0$, $\gamma \notin M_0$ et par conséquent d'après (A.5) on a $c \notin L_\beta$ car sinon on aurait $\gamma \in L_{\beta_{i_0}} \subseteq M_0$.
   On a alors $\gamma.\gamma^{'} = w(1)^{|\gamma.\gamma^{'}|}$ et d'après la propriété des "uns en masse" (P2.2), $a.w(-\beta).c.d \equiv (\prod_{i=1}^{i=i_0-2} w(a_i)).w(a_{i_0-1} + |\gamma.\gamma^{'}|).w(0).d$. On pose alors $\gamma_1 = (\prod_{i=1}^{i=i_0-2} w(a_i)).w(a_{i_0-1} + |\gamma.\gamma^{'}|)$ et $\gamma_2 = w(0)$. De plus on a :

$$\begin{aligned}
(\sigma \circ \varphi)(\gamma_1.\gamma_2) &= (\sigma \circ \varphi)(\gamma_1) + 1 \quad (\text{P2.5.2 car } \gamma_1 \in \Omega^*(\mathbb{N}^*) \text{ et } \gamma_2 = w(0))\\
&= (\textstyle\sum_{i=1}^{i=i_0-1} w(a_i)) + |\gamma.\gamma^{'}| + 1 && (\mathrm{P2.3.12})\\
&= (\sigma \circ \varphi)(a) - \beta + |\gamma.\gamma^{'}| + 1 && (\text{définitions de } a \text{ et } \beta_{i_0})\\
&= (\sigma \circ \varphi)(a) - \beta + (\sigma \circ \varphi)(\gamma.\gamma^{'}) + 1 && (\gamma.\gamma^{'} \notin M_0)\\
&= (\sigma \circ \varphi)(a) - \beta + (\sigma \circ \varphi)(c) + \varepsilon(\gamma^{'}) + 1 && (\mathrm{A.2})\\
&= (\sigma \circ \varphi)(a) - \beta + (\sigma \circ \varphi)(c) + \mathbb{1}_{\{w(0)\}}(\gamma_2)\\
& && (\gamma^{'} \in \Omega(\mathbb{N}^*) \text{ et } \gamma_2 = w(0))
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.5. ***Full left product in*** $\mathbb{Z}$
Soient $\beta \in \mathbb{N}$, $a \in \Omega(\mathbb{N}^*)$, $c \in M_0$, $d \in \Omega(\mathbb{Z})$ *tels que* $(\sigma \circ \varphi)(a) > \beta$ *et* $(\sigma \circ \varphi)(c) > \beta$.
Alors il existe $\gamma_1 \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$, $\gamma_2 \in \{e_w, w(0)\}$ *tels que :*

1. $a.w(-\beta).c.d \equiv \gamma_1.\gamma_2.d$
2. $(\sigma \circ \varphi)(\gamma_1.\gamma_2) = (\sigma \circ \varphi)(a) - \beta + (\sigma \circ \varphi)(c) + \mathbb{1}_{\{w(0)\}}(\gamma_2)$
3. *Si* $c \in L_\beta$ *alors* $\gamma_2 \neq w(0)$.

Démonstration. Soient donc a, β, c, d comme dans l'énoncé. Comme $(\sigma \circ \varphi)(a) > 0$, $|a| \geq 1$. Posons $r = |a|$ et $a = \prod_{i=1}^{i=r} w(a_i)$.
Si $\beta = 0$, comme $c \in M_0$, $a \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$ puisque $a \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ et $|a| \geq 1$, d'après (L3.7), il existe $\gamma_1 \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ tel que :

— $a.w(0).c.d \equiv \gamma_1.d$

— $(\sigma \circ \varphi)(\gamma_1) = (\sigma \circ \varphi)(a) + (\sigma \circ \varphi)(c)$

Posons alors $\gamma_2 = e_w$ pour établir le résultat cherché.
Supposons à présent $\beta > 0$.
Si $r = 1$, alors il s'agit de l'application immédiate du lemme du $\mathbb{Z}$-left-product (L3.5). On suppose alors $r > 1$.

Posons $V = \{j \geq 1 | \beta \leq \sum_{i=j}^{i=r} a_i\}$. L'ensemble V est non vide car $\beta < (\sigma \circ \varphi)(a)$. Posons $i_0 = max(V)$ et enfin, pour tous $n \in [\![1, r]\!]$, $\beta_n = \beta - \sum_{i=n}^{i=r} a_i$ et $\beta_n^{'} = \beta_{r+1-n}$. Soient, également, $Z_0 = \{v \in \Omega(\mathbb{Z}) | \exists a \in \Omega(\mathbb{N}^*), v = a.w(0)\}$ et $Z = \Omega(\mathbb{N}^*) \cup Z_0$.
Nous allons en premier lieu établir par récurrence la propriété (P_n) suivante définie par :
Pour tous $n \in [\![1, r - i_0 + 1]\!]$, il existe $\gamma_n \in \Omega(\mathbb{N}^*)$, $\gamma_n^{'} \in Z$ tels que :

I $a.w(-\beta).c.d \equiv (\prod_{i=1}^{i=r-n} w(a_i)).w(-\beta_n^{'}).\gamma_n.\gamma_n^{'}.d$

II $(\sigma \circ \varphi)(\gamma_n.\gamma_n^{'}) = (\sigma \circ \varphi)(c) + \varepsilon(\gamma_n^{'})$

III $(\sigma \circ \varphi)(\gamma_n) > \beta_n^{'} + 1$

IV Si $\gamma_n^{'} \in Z_0$ alors $\gamma_n \in L_{\beta_n^{'}}$

V Si $c \in L_\beta$ alors $\gamma_n \in L_{\beta_n^{'}}$ et $\gamma_n^{'} \notin Z_0$

(P_1) :
Puisque $(\sigma \circ \varphi)(c) > \beta$, $c \in M_0$, $a_r > 0$ d'après le lemme du Left-$\mathbb{Z}$-produit (L3.5), il existe $\gamma_1 \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ et $\gamma_1^{'} \in \Omega(\mathbb{N}^*) \cup \{w(0)\}$ tels que :

1. $w(a_r).w(-\beta).c.d \equiv w(a_r - \beta).\gamma_1.\gamma_1^{'}.d$
2. $(\sigma \circ \varphi)(\gamma_1) > \beta$
3. $(\sigma \circ \varphi)(\gamma_1.\gamma_1^{'}) = (\sigma \circ \varphi)(c) + \mathbb{1}_{\{w(0)\}}(\gamma_1^{'})$
4. (a) Si $((c \in Q_\beta \; et \; \rho(\beta, c) \neq 0) \; ou \; (\rho(\beta, c) > 1) \; ou$
   $(\rho(\beta, c) = 0 \; et \; (\sigma \circ \varphi)(c) > \beta + 1))$ alors $\gamma_1 \in L_\beta$
   (b) Si $\rho(\beta, c) = 0$ alors $\gamma_1(|\gamma_1|) > 1$
   (c) $(c \in Q_\beta \; ou \; \rho(\beta, c) \neq 0) \iff \gamma_1^{'} \neq w(0)$
   (d) Si $(c \in L_\beta \; et \; \rho(\beta, c) \neq 0)$ alors $\gamma_1^{'} = e_w$

Par conséquent, d'après (a) et la propriété du produit à droite (P2.3.5), on a :

$$\begin{aligned} a.w(-\beta).c.d &\equiv (\textstyle\prod_{i=1}^{i=r-1} w(a_i)).w(a_r - \beta).\gamma_1.\gamma_1^{'}.d \\ &\equiv (\textstyle\prod_{i=1}^{i=r-1} w(a_i)).w(-\beta_1^{'}).\gamma_1.\gamma_1^{'}.d \qquad \text{(cf. définition de } \beta_n^{'}) \end{aligned}$$

Puisque $\gamma_1^{'} \in \Omega(\mathbb{N}^*) \cup \{w(0)\}$, on a $\varepsilon(\gamma_1^{'}) = \mathbb{1}_{\{w(0)\}}(\gamma_1^{'})$ et par conséquent $(P_1.\text{II})$. De plus comme $a_r > 0$, $\beta - a_r = \beta - \sum_{i=r+1-n}^{i=r} a_i \leq \beta - 1 < (\sigma \circ \varphi)(\gamma_1) - 1$. Les points (I), (II), (III) de (P_1) sont donc établis. Montrons les deux derniers. Si $\gamma_1^{'} = w(0)$ alors d'après (L3.5.5d), $\rho(\beta, c) = 0$ et donc d'après (L3.5.5c) $\gamma_1(|\gamma_1|) > 1$. Et puisque $\beta - a_r = \beta_1^{'}$, $\gamma_1 \in L_{\beta_1^{'}}$; d'où $(P_1.\text{IV})$. De même, si $c \in L_\beta$ alors par définition $(\sigma \circ \varphi)(c) > \beta + 1$ et, d'après (P3.4), $c \in Q_\beta$. Par conséquent, d'après (L3.5.5b) $\gamma_1 \in L_\beta$ et, par suite, on aura $\gamma_1(|\gamma_1|) > 1$ et $\gamma_1 \in L_{\beta_1^{'}}$ également. Si $c \in L_\beta$, on a aussi $\gamma_1^{'} \notin Z_0$ d'après (L3.5.5d), d'où $(P_1.\text{V})$. Ce qui établit (P_1).

(P_{n+1}) :
Supposons alors que (P_n) soit vraie pour tout $n \leq (r - i_0 + 1) - 1$ et montrons que P_{n+1} est vraie également. Notons que comme $n + 1 \leq r - i_0 + 1$, $i_0 \leq r - n$ d'où $r - n \geq 1$ (possible car $r \geq 2$). On a :

$$\begin{aligned} a.w(-\beta).c.d &\equiv (\textstyle\prod_{i=1}^{i=r-n} w(a_i)).w(-\beta_n^{'}).\gamma_n.\gamma_n^{'}.d \qquad (P_n.\text{I}) \\ &\equiv (\textstyle\prod_{i=1}^{i=r-(n+1)} w(a_i)).w(a_{r-n}).w(-\beta_n^{'}).\gamma_n.\gamma_n^{'}.d \qquad (r - n \geq 1) \end{aligned}$$

Comme $i_0 \leq r-n < r-n+1$ et que $i_0 = max(\{j \geq 1 | \beta_j \leq 0\})$, on en déduit $\beta_{r-n+1} = \beta^{'}_n > 0$. Par conséquent, puisque $a_{r-n} > 0$, $(\sigma \circ \varphi)(\gamma_n) > \beta^{'}_n$ d'après (P_n.III) et $\beta^{'}_n > 0$, d'après le lemme du $\mathbb{Z}$-Left-Product (L3.5), il existe $C \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ et $C^{'} \in \Omega(\mathbb{N}^*) \cup \{w(0)\}$ tels que (en posant, $\rho_n = \rho(\beta^{'}_n, \gamma_n)$) :

a $w(a_{r-n}).w(-\beta^{'}_n).\gamma_n.\gamma^{'}_n.d \equiv w(a_{r-n} - \beta^{'}_n).C.C^{'}.\gamma^{'}_n.d$

b $(\sigma \circ \varphi)(C) > \beta^{'}_n$

c $(\sigma \circ \varphi)(C.C^{'}) = (\sigma \circ \varphi)(\gamma_n) + \mathbb{1}_{\{w(0)\}}(C^{'})$

d
  i Si $((\gamma_n \in Q_{\beta^{'}_n}$ *et* $\rho_n \neq 0)$ *ou* $(\rho_n > 1)$ *ou* $(\rho_n = 0$ *et* $(\sigma \circ \varphi)(\gamma_n) > \beta^{'}_n + 1))$ alors $C \in L_{\beta^{'}_n}$

  ii Si $\rho_n = 0$ alors $C(|C|) > 1$

  iii $(\gamma_n \in Q_{\beta^{'}_n}$ *ou* $\rho_n \neq 0) \iff C^{'} \neq w(0)$

  iv Si $(\gamma_n \in L_{\beta^{'}_n}$ *et* $\rho_n \neq 0)$ alors $C^{'} = e_w$

Comme $\beta^{'}_{n+1} = \beta^{'}_n - a_{r-n}$, on a :

$$w(a_{r-n}).w(-\beta^{'}_n).\gamma_n.\gamma^{'}_n.d \equiv w(-\beta^{'}_{n+1}).C.C^{'}.\gamma^{'}_n.d$$

— Si $C^{'} = w(0)$:

Comme $(\sigma \circ \varphi)(C) > \beta^{'}_n > 0$ et $C^{'} = w(0)$, on a d'après (c) ci-dessus $(\sigma \circ \varphi)(C) = (\sigma \circ \varphi)(\gamma_n)$. De plus comme $C^{'} = w(0)$, d'après (iii) ci-dessus $\gamma_n \notin Q_{\beta^{'}_n}$ et donc d'après (P3.4), $\gamma_n \notin L_{\beta^{'}_n}$. On en déduit que $\gamma^{'}_n \notin Z_0$ d'après (P_n.IV) et même $c \notin L_\beta$ d'après (P_n.V). On en déduit déjà (P_{n+1}.V) au passage.

— Si $\gamma^{'}_n \in M_0$:

Puisque $\gamma^{'}_n \in M_0$, d'après (L3.7), il existe $\rho \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ tel que :

— $C.C^{'}.\gamma^{'}_n.d \equiv \rho.d$

— $(\sigma \circ \varphi)(\rho) = (\sigma \circ \varphi)(C) + (\sigma \circ \varphi)(\gamma^{'}_n)$

Posons $\gamma_{n+1} = \rho$ et $\gamma^{'}_{n+1} = e_w$. On a d'après la propriété de l'équivalence à droite (P2.3.5) :

$$\begin{aligned} a.w(-\beta).c.d &\equiv (\textstyle\prod_{i=1}^{i=r-(n+1)} w(a_i)).w(a_{r-n}).w(-\beta^{'}_n).\gamma_n.\gamma^{'}_n.d \\ &\equiv (\textstyle\prod_{i=1}^{i=r-(n+1)} w(a_i)).w(-\beta^{'}_{n+1}).C.C^{'}.\gamma^{'}_n.d \\ &\equiv (\textstyle\prod_{i=1}^{i=r-(n+1)} w(a_i)).w(-\beta^{'}_{n+1}).\rho.d \\ &\equiv (\textstyle\prod_{i=1}^{i=r-(n+1)} w(a_i)).w(-\beta^{'}_{n+1}).\gamma_{n+1}.\gamma^{'}_{n+1}.d \end{aligned}$$

Ceci établit (P_{n+1}.I). De plus, on a (P_{n+1}.II) :

$$\begin{aligned} (\sigma \circ \varphi)(\gamma_{n+1}.\gamma^{'}_{n+1}) &= (\sigma \circ \varphi)(\rho) && (\text{cf. } \gamma_{n+1} \text{ et } \gamma^{'}_{n+1}) \\ &= (\sigma \circ \varphi)(C) + (\sigma \circ \varphi)(\gamma^{'}_n) && (\text{L3.7.c}) \\ &= (\sigma \circ \varphi)(\gamma_n) + (\sigma \circ \varphi)(\gamma^{'}_n) && (\text{cf. ci-dessus}) \\ &= (\sigma \circ \varphi)(\gamma_n.\gamma^{'}_n) && (\text{P2.5.4}) \\ &= (\sigma \circ \varphi)(c) + \varepsilon(\gamma^{'}_n) && (P_n.\text{II}) \\ &= (\sigma \circ \varphi)(c) + \varepsilon(\gamma^{'}_{n+1}) && (\gamma^{'}_n, \gamma^{'}_{n+1} \in \Omega(\mathbb{N}^*)) \end{aligned}$$

On en déduit (P_{n+1}.III) :

$$\begin{aligned}(\sigma\circ\varphi)(\gamma_{n+1}) &= (\sigma\circ\varphi)(\gamma_n.\gamma_n^{'}) && \text{(cf. ci-dessus et car } \gamma_{n+1}^{'} = e_w)\\ &\geq (\sigma\circ\varphi)(\gamma_n) && (\gamma_n^{'}\in\Omega(\mathbb{N}^*))\\ &\geq \beta_n^{'}+1 && (P_n.\text{III})\\ &> \beta_{n+1}^{'}+1 && \text{(cf. déf de } \beta_n^{'} \text{ et car } a_{r-n}>0)\end{aligned}$$

Enfin, (P_{n+1}.IV) est validé car $\gamma_{n+1}^{'}\notin Z_0$. Ceci termine de montrer (P_{n+1}) lorsque $\gamma_n^{'}\in M_0$.

— Si $\gamma_n^{'}\notin M_0$:
Comme $\gamma_n^{'}\notin Z_0$, $\gamma_n^{'}\in\Omega(\mathbb{N}^*)\setminus M_0$; autrement dit $\gamma_n^{'} = w(1)^{|\gamma_n^{'}|}$. Comme $(\sigma\circ\varphi)(C) > \beta_n^{'} > 0$, $|C|\geq 1$ et on a d'après la propriété des "ones in mass" (P2.2) :

$$\begin{aligned}C.C^{'}.\gamma_n^{'}.d &= C.w(0).w(1)^{|\gamma_n^{'}|}.d\\ &\equiv (\textstyle\prod_{i=1}^{i=|C|-1} C(i)).w(C(|C|)+|\gamma_n^{'}|).w(0).d\end{aligned}$$

Posons $\gamma_{n+1} = (\prod_{i=1}^{i=|C|-1} C(i)).w(C(|C|)+|\gamma_n^{'}|)$ et $\gamma_{n+1}^{'} = w(0)$. On vérifie que $\gamma_{n+1}\in\Omega(\mathbb{N}^*)$ car $C\in\Omega(\mathbb{N}^*)$. D'après (d.iii), comme $C^{'} = w(0)$, $\rho_n = 0$ et d'après (d.ii) $C(|C|) > 1$. Par conséquent, $\gamma_{n+1}(|\gamma_{n+1}|) = C(|C|)+|\gamma_n^{'}| > 1$. Par ailleurs d'après la propriété de l'équivalence à droite (P2.3.5) :

$$\begin{aligned}a.w(-\beta).c.d &\equiv (\textstyle\prod_{i=1}^{i=r-(n+1)} w(a_i)).w(-\beta_{n+1}^{'}).C.C^{'}.\gamma_n^{'}.d\\ &\equiv (\textstyle\prod_{i=1}^{i=r-(n+1)} w(a_i)).w(-\beta_{n+1}^{'}).\gamma_{n+1}.\gamma_{n+1}^{'}.d\end{aligned}$$

Ce qui établit (P_{n+1}.I). Montrons (P_{n+1}.II) :

$$\begin{aligned}(\sigma\circ\varphi)(\gamma_{n+1}.\gamma_{n+1}^{'}) &= (\sigma\circ\varphi)(\gamma_{n+1}.w(0)) && (\text{cf. } \gamma_{n+1}^{'})\\ &= (\textstyle\sum_{i=1}^{i=|C|-1} C(i)) + C(|C|) + |\gamma_n^{'}| + 1 && (\text{cf. } \gamma_{n+1})\\ &= (\sigma\circ\varphi)(C) + (\sigma\circ\varphi)(\gamma_n^{'}) + 1 && (\gamma_n^{'} = w(1)^{|\gamma_n^{'}|})\\ &= (\sigma\circ\varphi)(\gamma_n) + (\sigma\circ\varphi)(\gamma_n^{'}) + 1 && \text{(cf. ci-dessus)}\\ &= (\sigma\circ\varphi)(\gamma_n.\gamma_n^{'}) + 1 && (\text{P2.3.12 et } \gamma_n^{'}\in\Omega(\mathbb{N}^*))\\ &= (\sigma\circ\varphi)(c) + \varepsilon(\gamma_n^{'}) + 1 && (P_n.\text{II})\\ &= (\sigma\circ\varphi)(c) + \varepsilon(\gamma_{n+1}^{'}) && (\gamma_n^{'}\in\Omega(\mathbb{N}^*) \text{ et } \gamma_{n+1}^{'} = w(0))\end{aligned}$$

On en déduit (P_{n+1}.III) :

$$\begin{aligned}(\sigma\circ\varphi)(\gamma_{n+1}) &= (\sigma\circ\varphi)(\gamma_n.\gamma_n^{'}) + 1 - 1 && \text{(cf. ci-dessus et car } \gamma_{n+1}^{'} = w(0))\\ &\geq (\sigma\circ\varphi)(\gamma_n) && (\gamma_n^{'}\in\Omega(\mathbb{N}^*))\\ &\geq \beta_n^{'}+1 && (P_n.\text{III})\\ &> \beta_{n+1}^{'}+1 && \text{(cf. déf de } \beta_n^{'} \text{ et car } a_{r-n}>0)\end{aligned}$$

On a alors $(P_{n+1}.\mathrm{IV})$ car $(\sigma \circ \varphi)(\gamma_{n+1}) > \beta^{'}_{n+1} + 1$ et $\gamma_{n+1}(|\gamma_{n+1}|) > 1$. Ceci termine de montrer (P_{n+1}) lorsque $\gamma^{'}_n \notin M_0$. Ceci clôt également le cas $C^{'} = w(0)$.

— Si $C^{'} \neq w(0)$:
Posons $\gamma_{n+1} = C$ et $\gamma^{'}_{n+1} = C^{'}.\gamma^{'}_n$. Notons que $\gamma^{'}_{n+1} \in Z$ car $C^{'} \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ et $\gamma^{'}_n \in Z$. On en déduit $(P_{n+1}.\mathrm{I})$:

$$\begin{aligned} a.w(-\beta).c.d &\equiv (\textstyle\prod_{i=1}^{i=r-(n+1)} w(a_i)).w(-\beta^{'}_{n+1}).C.C^{'}.\gamma^{'}_n.d \\ &\equiv (\textstyle\prod_{i=1}^{i=r-(n+1)} w(a_i)).w(-\beta^{'}_{n+1}).\gamma_{n+1}.\gamma^{'}_{n+1}.d \end{aligned}$$

De plus on a $(P_{n+1}.\mathrm{III})$:

$$\begin{aligned} (\sigma \circ \varphi)(\gamma_{n+1}) &= (\sigma \circ \varphi)(C) \\ &> \beta^{'}_n && \text{(L3.5.b)} \\ &> \beta^{'}_{n+1} + 1 && (a_{r-n} > 0) \end{aligned}$$

Établissons $(P_{n+1}.\mathrm{II})$:

— Si $\gamma^{'}_n = w(0)$:

$$\begin{aligned} (\sigma \circ \varphi)(\gamma_{n+1}.\gamma^{'}_{n+1}) &= (\sigma \circ \varphi)(C.C^{'}.w(0)) \\ & \qquad \text{(définitions de } \gamma^{'}_{n+1} \text{ et } \gamma_{n+1}) \\ &= (\sigma \circ \varphi)(C.C^{'}) + 1 \\ & \qquad \text{(P2.5.2 car } |C| > 0 \text{ et } \gamma^{'}_n = w(0)) \\ &= (\sigma \circ \varphi)(\gamma_n) + 1 && \text{(L3.5.c et } C^{'} \in \Omega(\mathbb{N}^*)) \\ &= (\sigma \circ \varphi)(\gamma_n.\gamma^{'}_n) && \text{(P2.5.2 et } \gamma^{'}_n = w(0)) \\ &= (\sigma \circ \varphi)(c) + \varepsilon(\gamma^{'}_n) && (P_n.\mathrm{II}) \\ &= (\sigma \circ \varphi)(c) + \varepsilon(\gamma^{'}_{n+1}) && (\gamma^{'}_n \text{ suffixe de } \gamma^{'}_{n+1}) \end{aligned}$$

— Si $\gamma^{'}_n \neq w(0)$:

$$\begin{aligned} (\sigma \circ \varphi)(\gamma_{n+1}.\gamma^{'}_{n+1}) &= (\sigma \circ \varphi)(C.C^{'}) + (\sigma \circ \varphi)(\gamma^{'}_n) \\ & \qquad \text{(P2.5.4 car } |C| > 0 \text{ et } \gamma^{'}_n \in Z \setminus \{w(0)\}) \\ &= (\sigma \circ \varphi)(\gamma_n) + \mathbb{1}_{\{w(0)\}}(C^{'}) + (\sigma \circ \varphi)(\gamma^{'}_n) \\ & \qquad \text{(L3.5.c)} \\ &= (\sigma \circ \varphi)(\gamma_n) + (\sigma \circ \varphi)(\gamma^{'}_n) && (C^{'} \in \Omega(\mathbb{N}^*)) \\ &= (\sigma \circ \varphi)(\gamma_n.\gamma^{'}_n) \\ & \qquad \text{(P2.5.4 car } |\gamma_n| > 0 \text{ et } \gamma^{'}_n \in Z \setminus \{w(0)\}) \\ &= (\sigma \circ \varphi)(c) + \varepsilon(\gamma^{'}_n) && (P_n.\mathrm{II}) \\ &= (\sigma \circ \varphi)(c) + \varepsilon(\gamma^{'}_{n+1}) && (\gamma^{'}_n \text{ suffixe de } \gamma^{'}_{n+1}) \end{aligned}$$

Vérifions les deux autres propriétés de P_{n+1}.

— Si $\gamma_n \notin L_{\beta^{'}_n}$:
Dans ce cas, d'après $(P_n.\mathrm{V})$, $c \notin L_\beta$ et donc $(P_{n+1}.\mathrm{V})$ est vérifié. De même $\gamma^{'}_n \notin Z_0$ d'après $(P_n.\mathrm{IV})$ par conséquent $\gamma^{'}_{n+1} = C^{'}.\gamma^{'}_n \notin Z_0$. Par conséquent, $(P_{n+1}.\mathrm{IV})$ est vrai.

— <u>Si $\gamma_n \in L_{\beta'_n}$:</u>
Comme $\gamma_n \in L_{\beta'_n}$, par définition $(\sigma\circ\varphi)(\gamma_n) > \beta'_n+1$ et d'après (P3.4), $\gamma_n \in Q_{\beta'_n}$. On a donc, d'après (d.i), $C \in L_{\beta'_n}$. Par conséquent, $\gamma_{n+1} = C \in L_{\beta'_n}$ et comme $\beta'_{n+1} < \beta'_n$, $\gamma_{n+1} \in L_{\beta'_{n+1}}$. Si $c \in L_\beta$ alors, d'après (P_n.V), $\gamma'_n \notin Z_0$ et donc $\gamma'_{n+1} \notin Z_0$. Comme, de plus, $\gamma_{n+1} \in L_{\beta'_{n+1}}$, on a ($P_{n+1}$.V). Par ailleurs, ($P_{n+1}$.IV) est automatiquement vérifié puisque $\gamma_{n+1} \in L_{\beta'_{n+1}}$.

Ceci prouve donc que P_{n+1} est vraie et termine la récurrence.

Notons que $\beta'_{r-i_0+1} = \beta_{r+1-(r-i_0+1)} = \beta_{i_0}$. Par conséquent, comme P_n est vraie pour $n = r - i_0 + 1$, il existe $\gamma \in \Omega(\mathbb{N}^*)$, $\gamma' \in Z$ tels que :

$$a.w(-\beta).c.d \equiv (\textstyle\prod_{i=1}^{i=i_0-1} w(a_i)).w(-\beta_{i_0}).\gamma.\gamma'.d$$
$$(\sigma\circ\varphi)(\gamma.\gamma') = (\sigma\circ\varphi)(c) + \varepsilon(\gamma')$$
$$(\sigma\circ\varphi)(\gamma) > \beta_{i_0} + 1$$
$$\text{Si } \gamma' \in Z_0 \text{ alors } \gamma \in L_{\beta_{i_0}}$$
$$\text{Si } c \in L_\beta \text{ alors } \gamma' \notin Z_0 \text{ et } \gamma \in L_{\beta_{i_0}}$$

Par définition de i_0, $\beta_{i_0} \leq 0$. Par conséquent, si $\beta_{i_0} = 0$ alors $\gamma \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$ car $(\sigma\circ\varphi)(\gamma) > \beta_{i_0} + 1$. Enfin, remarquons que $\gamma' \in Z_0 \Rightarrow \gamma \in M_0$ d'après (P_{r-i_0+1}.IV).
Toutes les conditions sont alors réunies pour pouvoir appliquer le lemme (L3.8) et conclure cette proposition. □

Proposition 3.6. ***Extended full left product in $\mathbb{Z}$***
Soient $\beta \in \mathbb{Z}$, $a \in \Omega(\mathbb{N}^*)$, $c \in M_0$, $d \in \Omega(\mathbb{Z})$ tels que $(\sigma\circ\varphi)(a) > -\beta$ et $(\sigma\circ\varphi)(c) \geq -\beta$.
Alors il existe $\gamma_1 \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$, $\gamma_2 \in \{e_w, w(0), w(0)^2\}$ tels que :

1. *$a.w(\beta).c.d \equiv \gamma_1.\gamma_2.d$*
2. *$(\sigma\circ\varphi)(\gamma_1.\gamma_2) = (\sigma\circ\varphi)(a) + \beta + (\sigma\circ\varphi)(c) + \mathbb{1}_{\{w(0),w(0)^2\}}(\gamma_2)$*
3. *Si $\beta \geq 0$ ou $c \in L_{-\beta}$ alors $\gamma_2 = e_w$.*
4. *Si $(\sigma\circ\varphi)(c) > -\beta$ alors $\gamma_2 \neq w(0)^2$.*

Démonstration. Si $\beta > 0$, on pose alors $\gamma_1 = a.w(\beta).c$, $\gamma_2 = e_w$ et le résultat provient alors de (P2.3.12). Si $\beta = 0$, c'est alors (L3.7) qui donne le résultat. Supposons à présent $\beta < 0$. Si $(\sigma\circ\varphi)(c) > -\beta$ alors le résultat est immédiat en utilisant (P3.5). Supposons à présent $(\sigma\circ\varphi)(c) = -\beta$. On a donc $\rho(-\beta, c) = 0$ et $c \notin Q_{-\beta}$ en particulier, $c \notin L_{-\beta}$ car sinon on aurait $(\sigma\circ\varphi)(c) > -\beta$. Soient $r \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{N}^*$ tels que $a = \prod_{i=1}^{i=r} w(a_i)$. On a $r \geq 1$ car $(\sigma\circ\varphi)(a) > -\beta \geq 0$. Posons $a' \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ tel que $a = a'.w(a_r)$. D'après le lemme (L3.5), il existe $\gamma \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$, $\gamma' \in \Omega(\mathbb{N}^*) \cup \{w(0)\}$ tels que :

1. $w(a_r).w(\beta).c.d \equiv w(a_r + \beta).\gamma.\gamma'.d$
2. $(\sigma\circ\varphi)(\gamma) \geq -\beta$
3. $(\sigma\circ\varphi)(\gamma.\gamma') = (\sigma\circ\varphi)(c) + \mathbb{1}_{\{w(0)\}}(\gamma')$
4. $\gamma' = w(0)$

5. $\gamma = c$

D'après le propriété du produit à droite (P2.3.5), on a :

$$a.w(\beta).c.d \equiv a^{'}.w(a_r + \beta).c.w(0).d$$

Si $a_r + \beta \geq 0$, alors d'après le lemme du termination for the full left product in $\mathbb{Z}$, (L3.8), puisque $\gamma = c$ et $c \notin L_{-\beta}$, le résultat est acquit.

Supposons alors $a_r + \beta < 0$. Dans ce cas, $a^{'} \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$ car $(\sigma \circ \varphi)(a) > -\beta$ et $(\sigma \circ \varphi)(a^{'}) > -\beta - a_r$. Comme $(\sigma \circ \varphi)(c) = -\beta$ et $a_r > 0$, $(\sigma \circ \varphi)(c) > -\beta - a_r$. Par conséquent, d'après la proposition du full left product in $\mathbb{Z}$, (P3.5), il existe $\theta_1 \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$, $\theta_2 \in \{e_w, w(0)\}$ tels que :

1. $a^{'}.w(a_r + \beta).c.w(0).d \equiv \theta_1.\theta_2.w(0).d$
2. $(\sigma \circ \varphi)(\theta_1.\theta_2) = (\sigma \circ \varphi)(a^{'}) + a_r + \beta + (\sigma \circ \varphi)(c) + \mathbb{1}_{\{w(0)\}}(\theta_2)$
3. Si $c \in L_{-\beta}$ alors $\theta_2 \neq w(0)$

On en déduit :

1. $a.w(\beta).c.w(0).d \equiv \theta_1.\theta_2.w(0).d$
2. $(\sigma \circ \varphi)(\theta_1.\theta_2) = (\sigma \circ \varphi)(a) + \beta + (\sigma \circ \varphi)(c) + \mathbb{1}_{\{w(0)\}}(\theta_2)$
3. Si $c \in L_{-\beta}$ alors $\theta_2 \neq w(0)$

On pose alors $\gamma_1 = \theta_1$ et $\gamma_2 = \theta_2.w(0)$ pour conclure. □

Corollaire 3.9. ***Full left product in $\mathbb{Z}$***
Soient $\beta \in \mathbb{Z}$, $a, c \in \Omega(\mathbb{N}^*)$, $d \in \Omega(\mathbb{Z})$ tels que $-\beta < (\sigma \circ \varphi)(a)$. Si $\beta > 0$ ou alors si $c \in L_{-\beta}$ on a :

1. $a.w(\beta).c.d \equiv \overline{a.w(\beta).c}.d$
2. $(\sigma \circ \varphi)(a.w(\beta).c) = (\sigma \circ \varphi)(a) + \beta + (\sigma \circ \varphi)(c)$

Démonstration. Soient $\beta \in \mathbb{Z}$, $a \in \Omega(\mathbb{N}^*)$, $d \in \Omega(\mathbb{Z})$ tels que $-\beta < (\sigma \circ \varphi)(a)$. Si $\beta > 0$ alors $a.w(\beta).c \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ et $a.w(\beta).c = \overline{a.w(\beta).c}$. D'où $a.w(\beta).c.d \equiv \overline{a.w(\beta).c}.d$. D'après (P2.3.12), on a alors $(\sigma \circ \varphi)(a.w(\beta).c) = (\sigma \circ \varphi)(a) + \beta + (\sigma \circ \varphi)(c)$.

Supposons à présent $\beta \leq 0$. Si $c \in L_{-\beta}$, $(\sigma \circ \varphi)(c) > -\beta$ et donc d'après la proposition du full left product in $\mathbb{Z}$ (P3.5), il existe $\gamma_1 \in \Omega(\mathbb{N}^*)$, $\gamma_2 \in \{w(0), e_w\}$ tels que :

1. $a.w(\beta).c.d \equiv \gamma_1.\gamma_2.d$
2. $(\sigma \circ \varphi)(\gamma_1.\gamma_2) = (\sigma \circ \varphi)(a) + \beta + (\sigma \circ \varphi)(c) + \mathbb{1}_{\{w(0)\}}(\gamma_2)$
3. Si $c \in L_{-\beta}$ alors $\gamma_2 \neq w(0)$

Comme $c \in L_{-\beta}$, on en déduit $\gamma_2 = e_w$ et :

1. $a.w(\beta).c.d \equiv \gamma_1.d$
2. $(\sigma \circ \varphi)(\gamma_1) = (\sigma \circ \varphi)(a) + \beta + (\sigma \circ \varphi)(c)$

Cette équivalence étant valable pour $d = e_w$, $\overline{a.w(\beta).c} = \overline{\gamma_1} = \gamma_1$ puisque $\gamma_1 \in \Omega(\mathbb{N}^*)$. On a alors :

1. $a.w(\beta).c.d \equiv \overline{a.w(\beta).c}.d$
2. $(\sigma \circ \varphi)(a.w(\beta).c) = (\sigma \circ \varphi)(a) + \beta + (\sigma \circ \varphi)(c)$

□

3.3.3 σ-stability of K_p^t

Remarque 3.10. *Soit $t \geq 0$, on a $W(3^t) \in \{w(1)^n | n \in \mathbb{N}\} \iff t \in \{0, 1\}$.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(w(1)^n) = 2^{n+1} - 1$. De plus par définition de W, $\varphi(W(3^t)) = 3^t$. Par suite s'il existe n tel que $W(3^t) = w(1)^n$ alors $3^t - 2^{n+1} + 1 = 0$ et en particulier $3^t - 2^{n+1} + 1 = 0$ [8]. Comme pour tous $p \geq 0$, $3^{2p} = (3^2)^p = 1$ [8], on a aussi $3^{2p+1} = 3$ [8]. De même $2^{n+1} = 0$ [8] pour tous $n > 1$. On en déduit que pour tous $n > 1$, $3^t - 2^{n+1} + 1 \neq 0$ [8]. Le reste est évident. $\square$

Proposition 3.7. ***K_p^t stability***
Soient $x \in 2\mathbb{N}+1$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $Ob(x) = (x_i)_{1 \leq i \leq \lambda(x)}$. Soient $t > 1$, $\beta \geq 0$, $a \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ tels que $(\sigma \circ \varphi)(a) > \beta$ et $\sigma(3^t) > \beta + 1$. Alors il existe $\gamma \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$, $\gamma' \in \{e_w, w(0), w(0)^2\}$ tels que :

1. *$a.w(-\beta).K_p^t(x) \equiv \gamma.\gamma'$*
2. *$(\sigma \circ \varphi)(\gamma) = (\sigma \circ \varphi)(a) - \beta + \sigma(3^t) + \sum_{i=p}^{i=\lambda(x)} x_i$*
3. *Si $W(3^t)(|W(3^t)|) > 1$ et $\varphi(S_p(x)) \in E_0$ alors $\gamma' = e_w$*
4. *Si $\gamma' = w(0)^2$ alors $\varphi(S_p(x)) \notin E_0$*

En particulier, il existe $\gamma \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$, $\gamma' \in \{e_w, w(0), w(0)^2\}$ tels que :

1. *$K_p^t(x) \equiv \gamma.\gamma'$*
2. *$(\sigma \circ \varphi)(K_p^t(x)) = \sigma(3^t) + \sum_{i=p}^{i=\lambda(x)} x_i + \mathbb{1}_{\{w(0),w(0)^2\}}(\gamma')$*
3. *Si $W(3^t)(|W(3^t)|) > 1$ et $\varphi(S_p(x)) \in E_0$ alors $\gamma' = e_w$ autrement dit :*
   (a) *$K_p^t(x) = \overline{K_p^t(x)}$*
   (b) *$(\sigma \circ \varphi)(K_p^t(x)) = \sigma(3^t) + \sum_{i=p}^{i=\lambda(x)} x_i$*

Démonstration. Posons $r = \lambda(x)$. Notons que si $p > r$, $K_p^t(x) = W(3^t)$. Comme $(\sigma \circ \varphi)(W(3^t)) > \beta$ et $(\sigma \circ \varphi)(a) > \beta$ d'après la proposition du $\mathbb{Z}$-Left-product (P3.5), il existe $\gamma \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$ et $\gamma' \in \{w(0), e_w\}$ tels que :

1. $$a.w(-\beta).K_p^t(x) \equiv \gamma.\gamma'$$
2. $$\begin{aligned}(\sigma \circ \varphi)(\gamma) &= (\sigma \circ \varphi)(a) - \beta + \sigma(3^t) && ((\sigma \circ \varphi)(W(3^t)) = \sigma(3^t)) \\ &= (\sigma \circ \varphi)(a) - \beta + \sigma(3^t) + \textstyle\sum_{i=p}^{i=r} x_i && (p > r)\end{aligned}$$

De plus, comme $\sigma(3^t) > \beta + 1$, si $W(3^t)(|W(3^t)|) > 1$ alors $\gamma' = e_w$. Donc il s'agit ici d'une application immédiate. Supposons à présent $p \leq r$, ce qui implique $\mathring{x} \neq \emptyset$ puisque $p > 0$. D'après la remarque sur l'écriture des mots $W(3^t)$ (R3.10), $W(3^t) \in M_0$. En plus des conditions de l'énoncé de la proposition posons, $k_{p-1} = \sigma(3^t) - \beta$ et pour tous $i \in [\![p, r]\!]$, $k_i = x_i$ et $n_1, n_2 \in [\![p-1, r]\!]$, $\Gamma_{n_1}^{n_2} = \prod_{i=n_1}^{i=n_2} (w(k_i - \sigma(3^t)).W(3^t))$ avec $\Gamma_{n_1}^{n_2} = e_w$ si $n_1 > n_2$.
Montrons, par récurrence sur $n \in [\![0, r-p+1]\!]$, la propriété (P_n) stipulant l'existence de $\gamma_n \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$ et $\gamma_n' \in \{e_w, w(0), w(0)^2\}$ tels que :

1. $a.w(-\beta).K_p^t(x) \equiv \gamma_n.\gamma_n^{'}.\Gamma_{p+n}^r$
2. $(\sigma \circ \varphi)(\gamma_n) = (\sigma \circ \varphi)(a) + \sum_{i=-1}^{i=n-1} k_{p+i}$
3. Si $W(3^t)(|W(3^t)|) > 1$ et $\varphi(S_p(x)) \in E_0$ alors $\gamma_n^{'} = e_w$
4. Si $\gamma_n^{'} = w(0)^2$ alors $\varphi(S_p(x)) \notin E_0$

Cas P_0 :
Soit $n = 0$.
Comme $(\sigma \circ \varphi)(a) > \beta$ et $(\sigma \circ \varphi)(W(3^t)) > \beta + 1$, $W(3^t) \in M_0$, d'après $\mathbb{Z}$-Left-product (P3.5) il existe $\gamma_0 \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$ et $\gamma_0^{'} \in \{e_w, w(0)\}$:

$$
\begin{aligned}
& a.w(-\beta).W(3^t).d \equiv \gamma_0.\gamma_0^{'}.d \quad \text{pour tous } d \in \Omega(\mathbb{Z}) \\
& (\sigma \circ \varphi)(\gamma_0) = (\sigma \circ \varphi)(a) - \beta + \sigma(3^t) \\
& \text{si } (W(3^t))(|W(3^t)|) > 1 \text{ alors } \gamma_0^{'} = e_w
\end{aligned}
$$

On en déduit :

$$
\begin{aligned}
& a.w(-\beta).K_p^t(x) \equiv \gamma_0.\gamma_0^{'}.\Gamma_{p+n}^r && (\text{P2.3.5 avec } d = \Gamma_{p+1}^r) \\
& (\sigma \circ \varphi)(\gamma_0) = (\sigma \circ \varphi)(a) + k_{p-1} = (\sigma \circ \varphi)(a) + \textstyle\sum_{i=-1}^{i=n-1} k_{p+i}
\end{aligned}
$$

Ce qui établit (P_0).
Cas P_{n+1} :
Supposons à présent que P_n soit vraie jusqu'au rang n et montrons la au rang $n+1$. Soit $n+1 \leq r-p+1$. Par hypothèse de récurrence, il existe $\gamma_n \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$ et $\gamma_n^{'} \in \{e_w, w(0), w(0)^2\}$ tels que :

1. $a.w(-\beta).K_p^t(x) \equiv \gamma_n.\gamma_n^{'}.\Gamma_{p+n}^r$
2. $(\sigma \circ \varphi)(\gamma_n) = (\sigma \circ \varphi)(a) + \sum_{i=-1}^{i=n-1} k_{p+i}$
3. Si $W(3^t)(|W(3^t)|) > 1$ et $\varphi(S_p(x)) \in E_0$ alors $\gamma_n^{'} = e_w$
4. Si $\gamma_n^{'} = w(0)^2$ alors $\varphi(S_p(x)) \notin E_0$

Comme $p + n \leq r$ et $\mathring{x} \neq \emptyset$, on a :

$$a.w(-\beta).K_p^t(x) \equiv \gamma_n.\gamma_n^{'}.w(k_{p+n} - \sigma(3^t)).W(3^t).\Gamma_{p+n+1}^r$$

Nous avons également :

$$
\begin{aligned}
(\sigma \circ \varphi)(\gamma_n) &= (\sigma \circ \varphi)(a) + \textstyle\sum_{i=-1}^{i=n-1} k_{p+i} && (P_n) \\
&= (\sigma \circ \varphi)(a) - \beta + \sigma(3^t) + \textstyle\sum_{i=0}^{i=n-1} k_{p+i} && (\text{par définition de } k_{p-1}) \\
&> \sigma(3^t) + \textstyle\sum_{i=0}^{i=n-1} k_{p+i} && ((\sigma \circ \varphi)(a) - \beta > 0) \\
&> \sigma(3^t) && (k_{p+i} > 0 \text{ pour tous } i \in [\![0, r-p]\!]) \\
&> \sigma(3^t) + 1 - k_{p+n} && (k_{p+n} > 0 \text{ pour } n \geq 0)
\end{aligned}
$$

1. Si $\gamma_n^{'} = e_w$
   Nous avons $a.w(-\beta).K_p^t(x) \equiv \gamma_n.w(k_{p+n} - \sigma(3^t)).W(3^t).\Gamma_{p+n+1}^r$.
   $k_{p+n} > \sigma(3^t)$:

Posons $\gamma_{n+1} = \gamma_n.\gamma_n^{'}.w(k_{p+n} - \sigma(3^t)).W(3^t)$ et $\gamma_{n+1}^{'} = e_w$. On contrôle que $\gamma_{n+1} \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ et on a :

$$\begin{aligned}
(\sigma \circ \varphi)(\gamma_{n+1}) &= (\sigma \circ \varphi)(\gamma_n) + (k_{p+n} - \sigma(3^t)) + \sigma(3^t) && \text{(P2.3.12)}\\
&= (\sigma \circ \varphi)(a) + (\textstyle\sum_{i=-1}^{i=n-1} k_{p+i}) + k_{p+n} && (P_n)\\
&= (\sigma \circ \varphi)(a) + (\textstyle\sum_{i=-1}^{i=(n+1)-1} k_{p+i})
\end{aligned}$$

Et bien sûr on a aussi $a.w(-\beta).K_p^t(x) \equiv \gamma_{n+1}.\gamma_{n+1}^{'}.\Gamma_{p+n+1}^r$.
$\underline{k_{p+n} \leq \sigma(3^t)}$:
Comme $k_{p+n} \in \mathring{x}$, $k_{p+n} > 0$ et $(\sigma \circ \varphi)(W(3^t)) > \sigma(3^t) - k_{p+n}$ et $(\sigma \circ \varphi)(\gamma_n) > \sigma(3^t) - k_{p+n} + 1 > \sigma(3^t) - k_{p+n}$, $W(3^t) \in M_0$, d'après la proposition du $\mathbb{Z}$-Full-Left-product (P3.5), il existe $\gamma_{n+1} \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$ et $\gamma_{n+1}^{'} \in \{e_w, w(0)\}$ tels que :

(a) $a.w(-\beta).K_p^t(x) \equiv \gamma_{n+1}.\gamma_{n+1}^{'}.\Gamma_{p+n+1}^r$
(b) $(\sigma \circ \varphi)(\gamma_{n+1}) = (\sigma \circ \varphi)(\gamma_n) + k_{p+n} - \sigma(3^t) + (\sigma \circ \varphi)(W(3^t))$
(c) Si $W(3^t) \in L_{\sigma(3^t)-k_{p+n}}$ alors $\gamma_{n+1}^{'} = e_w$

On a alors :

$$\begin{aligned}
(\sigma \circ \varphi)(\gamma_{n+1}) &= (\sigma \circ \varphi)(\gamma_n) + k_{p+n} - \sigma(3^t) + (\sigma \circ \varphi)(W(3^t)) && \text{(P3.5)}\\
&= (\sigma \circ \varphi)(\gamma_n) + k_{p+n}\\
&= (\sigma \circ \varphi)(a) + \textstyle\sum_{i=-1}^{i=n-1} k_{p+i} + k_{p+n} && (P_n)\\
&= (\sigma \circ \varphi)(a) + \textstyle\sum_{i=-1}^{i=(n+1)-1} k_{p+i}
\end{aligned}$$

Si $W(3^t) \in L_{\sigma(3^t)-k_{p+n}}$, $(\sigma \circ \varphi)(W(3^t)) > \sigma(3^t) - k_{p+n} + 1$ autrement dit $k_{p+n} > 1$ et $W(3^t)(|W(3^t)|) > 1$. Par conséquent :

$$\text{Si } \varphi(S_p(x)) \in E_0 \text{ et } W(3^t)(|W(3^t)|) > 1 \text{ alors } \gamma_{n+1}^{'} = e_w.$$

2. $\underline{\text{Si } \gamma_n^{'} = w(0) \text{ ou } \gamma_n^{'} = w(0)^2}$
Dans ce cas, nous ne pouvons avoir à la fois $W(3^t)(|W(3^t)|) > 1$ et $\varphi(S_p(x)) \in E_0$ car sinon nous aurions d'après (P_n) $\gamma_n^{'} = e_w$.
   (a) $\underline{\text{Si } \gamma_n^{'} = w(0)}$
   On a $a.w(-\beta).K_p^t(x) \equiv \gamma_n.w(0).w(k_{p+n} - \sigma(3^t)).W(3^t).\Gamma_{p+n+1}^r$.
   Posons $Y = \gamma_n.w(0).w(k_{p+n} - \sigma(3^t))$, on a :

$$\begin{aligned}
Y &= \gamma_n.w(0).w(k_{p+n} - \sigma(3^t))\\
&\equiv \textstyle\prod_{i=1}^{i=|\gamma_n|-1} (\gamma_n)(i).w((\gamma_n)(|\gamma_n|)).w(0).w(k_{p+n} - \sigma(3^t))\\
&\qquad\qquad ((\sigma \circ \varphi)(\gamma_n) \geq (\sigma \circ \varphi)(a) > 0)\\
&\equiv \textstyle\prod_{i=1}^{i=|\gamma_n|-1} (\gamma_n)(i).w((\gamma_n)(|\gamma_n|) + 1).w(k_{p+n} - \sigma(3^t) - 1)\\
&\qquad\qquad \text{(P2.2)}
\end{aligned}$$

   Posons $X = \prod_{i=1}^{i=|\gamma_n|-1} (\gamma_n)(i).w((\gamma_n)(|\gamma_n|) + 1)$.
   (b) $\underline{\text{Si } \gamma_n^{'} = w(0)^2}$
   On a $a.w(-\beta).K_p^t(x) \equiv \gamma_n.w(0)^2.w(k_{p+n} - \sigma(3^t)).W(3^t).\Gamma_{p+n+1}^r$.
   On a d'après (P2.2), $\gamma_n.w(0)^2.w(k_{p+n} - \sigma(3^t)) \equiv \gamma_n.w(1).w(k_{p+n} - \sigma(3^t) - 1)$. Posons $X = \gamma_n.w(1)$.

On a d'après la propriété de l'équivalence à droite (P2.3.5) :

$$a.w(-\beta).K_p^t(x) \equiv X.w(k_{p+n} - \sigma(3^t) - 1).W(3^t).\Gamma^r_{p+n+1}$$

De plus par construction $X \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ et $(\sigma \circ \varphi)(X) = (\sigma \circ \varphi)(\gamma_n) + 1$.
<u>$k_{p+n} > \sigma(3^t) + 1$:</u>
Posons $\gamma_{n+1} = X.w(k_{p+n} - \sigma(3^t) - 1).W(3^t)$ et $\gamma^{'}_{n+1} = e_w$. On contrôle que $\gamma_{n+1} \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ et on a d'après (P2.3.12) :

$$(\sigma \circ \varphi)(\gamma_{n+1}) = (\sigma \circ \varphi)(X) + (k_{p+n} - \sigma(3^t) - 1) + \sigma(3^t)$$

Et bien sûr on a aussi $a.w(-\beta).K_p^t(x) \equiv \gamma_{n+1}.\gamma^{'}_{n+1}.\Gamma^r_{p+n+1}$.
<u>$k_{p+n} \leq \sigma(3^t) + 1$:</u>
Comme $n \geq 0$, $k_{p+n} \geq 1$ et $(\sigma \circ \varphi)(W(3^t)) = \sigma(3^t) \geq \sigma(3^t) + 1 - k_{p+n}$. Par ailleurs, $(\sigma \circ \varphi)(X) > (\sigma \circ \varphi)(\gamma_n) > \sigma(3^t) + 1 - k_{p+n}$ et $W(3^t) \in M_0$ donc d'après la proposition du extended $\mathbb{Z}$-Full-Left-product (P3.6) il existe $\gamma_{n+1} \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$ et $\gamma^{'}_{n+1} \in \{e_w, w(0), w(0)^2\}$ tels que :

(a) $a.w(-\beta).K_p^t(x) \equiv \gamma_{n+1}.\gamma^{'}_{n+1}.\Gamma^r_{p+n+1}$
(b) $(\sigma \circ \varphi)(\gamma_{n+1}) = (\sigma \circ \varphi)(X) + k_{p+n} - \sigma(3^t) - 1 + (\sigma \circ \varphi)(W(3^t))$

On a alors (pour les deux cas) :

$$\begin{aligned}(\sigma \circ \varphi)(\gamma_{n+1}) &= (\sigma \circ \varphi)(X) + (k_{p+n} - \sigma(3^t) - 1) + \sigma(3^t) \\ &= (\sigma \circ \varphi)(\gamma_n) + 1 + k_{p+n} - 1 \quad \text{(cf. ci-dessus } (\sigma \circ \varphi)(X)) \\ &= (\sigma \circ \varphi)(a) + (\textstyle\sum_{i=-1}^{i=n-1} k_{p+i}) + k_{p+n} \qquad (P_n) \\ &= (\sigma \circ \varphi)(a) + (\textstyle\sum_{i=-1}^{i=(n+1)-1} k_{p+i})\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration par récurrence de (P_n).
Comme, en particulier, P_{r-p+1} est vraie. Il existe $\gamma \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$ et $\gamma^{'} \in \{e_w, w(0), w(0)^2\}$ tels que :

1. $a.w(-\beta).K_p^t(x) \equiv \gamma.\gamma^{'}.\Gamma^r_{r+1}$
2. $(\sigma \circ \varphi)(\gamma) = (\sigma \circ \varphi)(a) + \sum_{i=-1}^{i=r-p} k_{p+i}$
3. Si $W(3^t)(|W(3^t)|) > 1$ et $\varphi(S_p(x)) \in E_0$ alors $\gamma^{'} = e_w$
4. Si $\gamma^{'} = w(0)^2$ alors $\varphi(S_p(x)) \notin E_0$

En reprenant la définition des k_{p+i} et en notant que $\Gamma^r_{r+1} = e_w$, on a le résultat attendu, à savoir :

1. $a.w(-\beta).K_p^t(x) \equiv \gamma.\gamma^{'}$
2. $(\sigma \circ \varphi)(\gamma) = (\sigma \circ \varphi)(a) - \beta + \sigma(3^t) + \sum_{i=p}^{i=r} x_i$

Ceci termine donc la preuve de la première partie de la proposition. Passons à son cas particulier.

Notons que si $p > \lambda(x)$, $K_p^t(x) = W(3^t)$ et le résultat est immédiat (et indépendant de x), il suffit de choisir $\gamma = W(3^t)$ ($W(3^t) \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$ car $t > 0$) et $\gamma^{'} = e_w$. Supposons à présent que $p \leq \lambda(x) = r$. On peut alors écrire $K_p^t(x) = W(3^t).w(x_p - \sigma(3^t)).K_{p+1}^t(x)$.
Supposons que pour tous $n \leq r - p$, $x_{p+n} - \sigma(3^t) > 0$ alors dans ce cas

$K_p^t(x) \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ et donc $K_p^t(x) \equiv \overline{K_p^t(x)}$. De plus $(\sigma \circ \varphi)(K_p^t(x)) = \sigma(3^t) + \sum_{i=p}^{i=r}((x_i - \sigma(3^t)) + \sigma(3^t)) = \sigma(3^t) + \sum_{i=p}^{i=r} x_i$. Il suffit alors de choisir $\gamma = K_p^t(x)$ et $\gamma^{'} = e_w$.
Supposons à présent qu'il existe $i_0 \in [\![p, r]\!]$ tel que pour tous $i < i_0$, $x_i - \sigma(3^t) > 0$ et $x_{i_0} - \sigma(3^t) \leq 0$. Posons pour tous $n_1, n_2 \in [\![p, r]\!]$,
$\Theta_{n_1}^{n_2} = \prod_{i=n_1}^{i=n_2}(W(3^t).w(x_i - \sigma(3^t)))$ avec $\Theta_{n_1}^{n_2} = e_w$ si $n_1 > n_2$. On a :

$$K_p^t(x) = \Theta_p^{i_0-1}.W(3^t).w(x_{i_0} - \sigma(3^t)).K_{i_0+1}^t(x)$$

Puisque $\Theta_p^{i_0-1} \in \Omega(\mathbb{N}^*)$, $(\sigma \circ \varphi)(\Theta_p^{i_0-1}.W(3^t)) \geq (\sigma \circ \varphi)(W(3^t)) > \sigma(3^t) - x_{i_0}$. Par conséquent d'après la première partie de la proposition, il existe $\gamma \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$ et $\gamma^{'} \in \{e_w, w(0), w(0)^2\}$ tels que :

1. $K_p^t(x) \equiv \gamma.\gamma^{'}$
2. $(\sigma \circ \varphi)(\gamma) = (\sigma \circ \varphi)(\Theta_p^{i_0-1}.W(3^t)) - (x_{i_0} - \sigma(3^t)) + \sigma(3^t) + \sum_{i=i_0+1}^{i=r} x_i$
3. Si $W(3^t)(|W(3^t)|) > 1$ et $\varphi(S_{i_0+1}(x)) \in E_0$ alors $\gamma^{'} = e_w$

Notons que si $\varphi(S_p(x)) \in E_0$ alors $\varphi(S_{i_0+1}(x)) \in E_0$. De plus :

$$\begin{aligned}
(\sigma \circ \varphi)(\gamma) &= (\sigma \circ \varphi)(\Theta_p^{i_0-1}.W(3^t)) - (x_{i_0} - \sigma(3^t)) + \sigma(3^t) + \textstyle\sum_{i=i_0+1}^{i=r} x_i \\
&= (\textstyle\sum_{i=p}^{i_0-1}(x_i - \sigma(3^t)) + \sigma(3^t)) + \sigma(3^t) + x_{i_0} + \sum_{i=i_0+1}^{i=r} x_i \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(P2.3.12 et définition de } \Theta_{n_1}^{n_2}\text{)} \\
&= \sigma(3^t) + \textstyle\sum_{i=p}^{i=r} x_i
\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve du cas particulier. □

Remarque 3.11. *Pour retrouver un résultat similaire à la stabilité de K_p^t (P3.7) mais pour $t = 0$, on se tournera dans ce cas vers la propriété dite du full left product in $\mathbb{Z}$ (P3.5) puisque, pour $t = 0$, $W(3^t) = e_w$ et $K_p^t(x) = S_p(x)$. Quant au cas $t = 1$, il sera traité séparément plus loin.*

Corollaire 3.12. *K_p^t stability*
Soient $x \in 2\mathbb{N}+1$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $Ob(x) = (x_i)_{1 \leq i \leq \lambda(x)}$. Soient $t > 1$, $\beta \geq 0$, $a \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ tels que $(\sigma \circ \varphi)(a) > \beta$ et $\sigma(3^t) > \beta + 1$. Posons $r = \lambda(x)$. Alors :

1. *Si $W(3^t)(|W(3^t)|) > 1$ et $\varphi(S_p(x)) \in E_0$*
   (a) i. $K_p^t(x) \equiv \overline{K_p^t(x)}$
   ii. $(\sigma \circ \varphi)(K_p^t(x)) = \sigma(3^t) + \sum_{i=p}^{i=r} x_i$
   (b) i. $a.w(-\beta).K_p^t(x) \equiv \overline{a.w(-\beta).K_p^t(x)}$
   ii. $(\sigma \circ \varphi)(a.w(-\beta).K_p^t(x)) = (\sigma \circ \varphi)(a) - \beta + \sigma(3^t) + \sum_{i=p}^{i=r} x_i$
2. *Si $W(3^t)(|W(3^t)|) = 1$ ou $\varphi(S_p(x)) \notin E_0$*
   (a) *Il existe $v \in \Omega(\mathbb{N}^*)$, $\delta \in \{0, 1\}$ tels que :*
   i. $K_p^t(x) \equiv v$
   ii. $(\sigma \circ \varphi)(v) = \sigma(3^t) + (\sum_{i=p}^{i=r} x_i) + \delta$

(b) Il existe $v \in \Omega(\mathbb{N}^*)$, $\delta \in \{0,1\}$ tels que :

i. $a.w(-\beta).K_p^t(x) \equiv v$

ii. $(\sigma \circ \varphi)(v) = (\sigma \circ \varphi)(a) - \beta + \sigma(3^t) + (\sum_{i=p}^{i=r} x_i) + \delta$

Démonstration. Soient $\gamma \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$, $\gamma^{'} \in \{e_w, w(0), w(0)^2\}$ tels que définis dans la proposition sur la K_p^t-stability (P3.7). Soit $h \in \Omega(\mathbb{Z})$ tel que $h \equiv \gamma.\gamma^{'}$. On a :

$$(\sigma \circ \varphi)(h) = \begin{cases} (\sigma \circ \varphi)(\gamma) & \text{si } \gamma^{'} = e_w, \\ (\sigma \circ \varphi)(\gamma) + 1 & \text{si } \gamma^{'} = w(0) \quad \text{car } \gamma \in \Omega^*(\mathbb{N}^*) \text{ et (P2.5.2)}, \\ (\sigma \circ \varphi)(\gamma) + 1 & \text{si } \gamma^{'} = w(0)^2 \quad \text{car } w(0)^2 \equiv w(1) \text{ et (P2.2)} \end{cases}$$

De ce fait, on a $(\sigma \circ \varphi)(h) = (\sigma \circ \varphi)(\gamma) + \mathbb{1}_{\{w(0), w(0)^2\}}(\gamma^{'})$. Le reste est alors évident, il suffit alors de relire (P3.7). □

Proposition 3.8. ***Miscellaneous little properties***
Nous avons les propriétés suivantes :

1. *Soient $n, \alpha \in \mathbb{Z}$, $b \in \Omega(\mathbb{Z})$. Nous avons :*

$$\varphi(w(-n, \alpha).b) = 2^{-n}\varphi(w(n, \alpha - n).b)$$

2. *Soit $t \geq 0$ alors $\sigma(3^{t+1}) > \sigma(3^t)$.*
3. *Si $n \in \mathbb{N}$: $n\frac{ln(3)}{ln(2)} \in \mathbb{N} \iff n = 0$.*
4. *Soit $t \geq 1$ alors :*

$$\xi(t-1) = 1 \iff W(3^t)(|W(3^t)|) > 1\,;$$
$$\xi(t-1) = 0 \iff W(3^t)(|W(3^t)|) = 1.$$

5. *Soit $a \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$ alors $(\sigma \circ \varphi)(w(0).a) < (\sigma \circ \varphi)(a)$.*

Démonstration. Montrons les énoncés dans leur ordre d'apparition.

1. On a :

$$\begin{aligned} \varphi(w(-n, \alpha).b) &= 1 + 2^{-n}(1 + 2^{\alpha}(\varphi(b))) && \text{(cf. définition de } \varphi) \\ &= 2^{-n}(2^n(1 + 2^{-n}(1 + 2^{\alpha}(\varphi(b))))) \\ &= 2^{-n}(2^n + 2^0(1 + 2^{\alpha}(\varphi(b)))) \\ &= 2^{-n}(2^n + 1 + 2^{\alpha}(\varphi(b))) \\ &= 2^{-n}(1 + 2^n(1 + 2^{\alpha - n}(\varphi(b)))) \\ &= 2^{-n}\varphi(w(n, \alpha - n).b) && \text{(cf. définition de } \varphi) \end{aligned}$$

2. Soit $t \geq 0$ alors :

$$\begin{aligned} \sigma(3^{t+1}) &= \lfloor (t+1)\frac{ln(3)}{ln(2)} \rfloor && \text{(P1.2)} \\ &\geq \lfloor t\frac{ln(3)}{ln(2)} + 1 \rfloor && (\text{car } \tfrac{ln(3)}{ln(2)} > 1) \\ &> \lfloor t\frac{ln(3)}{ln(2)} \rfloor \\ &> \sigma(3^t) && \text{(P1.2)} \end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$, $n\frac{ln(3)}{ln(2)} \in \mathbb{N}$. Montrons la réciproque. Soit $t \in \mathbb{N}$ tel que $n\frac{ln(3)}{ln(2)} = t$ alors $2^t = 3^n$. Comme 3^n est impair si $n > 0$ et 2^t pair, n ne peut valoir que 0.
4. Soit $t \geq 1$, nous allons montrer les deux relations suivantes :
   (a) $(\xi(t-1) = 1) \Rightarrow (W(3^t)(|W(3^t)|) > 1)$
   (b) $(\xi(t-1) = 0) \Rightarrow (W(3^t)(|W(3^t)|) = 1)$

   Comme l'application ξ est à valeurs dans $\{0,1\}$ et $W(3^t) \in \Omega(\mathbb{N}^*)$, $(a) \iff \neg(\xi(t-1) = 0) \Rightarrow \neg(W(3^t)(|W(3^t)|) = 1)$. Autrement dit (a) est équivalente à la contraposée de (b). Par conséquent, on aura :

$$(\xi(t-1) = 1) \iff (W(3^t)(|W(3^t)|) > 1) \tag{3}$$
$$(\xi(t-1) = 0) \iff (W(3^t)(|W(3^t)|) = 1) \tag{4}$$

   Montrons donc (a) puis (b).
   Si $\xi(t-1) = 1$:
   Par définition de ξ, il existe $a \in \Omega(\mathbb{N}^*)$, $n \in \mathbb{N}$ tels que $W(3^{t-1}) = a.w(1).w(2)^n$.
   Si $|a| = 0$ alors $W(3^{t-1}) = w(1).w(2)^n$ et d'après (P2.10), on a :

$$\begin{aligned} W(3^t) &= \overline{w}(w(1).w(0).w(1).w(1)^{2n}) \\ &= \overline{w}(w(2n+3)) && \text{(P2.2)} \\ &= w(2n+3) && (\text{car } n \geq 0) \end{aligned}$$

   Par conséquent, $W(3^t)(|W(3^t)|) > 1$. Si $|a| > 0$, posons $r = |a|$ et soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$ tels que $a = \prod_{i=1}^{i=r} w(\alpha_i)$.
   Posons $a^{'} = w(1).(\prod_{i=1}^{i=r-1} w(\alpha_i - 1, 1)).w(\alpha_r - 1)$. On a d'après (P2.10) :

$$\begin{aligned} W(3^t) &= \overline{w}(w(1).(\textstyle\prod_{i=1}^{i=r} w(\alpha_i - 1, 1)).w(0,1).w(1)^{2n}) \\ &= \overline{w}(w(1).(\textstyle\prod_{i=1}^{i=r-1} w(\alpha_i - 1, 1)).w(\alpha_r - 1, 1).w(0,1).w(1)^{2n}) \\ & && (\text{car } r > 1) \\ &= \overline{w}(a^{'}.w(1).w(0,1).w(1)^{2n}) && (\text{définition de } a^{'}) \\ &= \overline{w}(a^{'}.w(2n+3)) && \text{(P2.2)} \\ &= \overline{a^{'}}.w(2n+3-\varepsilon(a^{'})) && (\text{P2.8 et car } 2n+3 > 1) \end{aligned}$$

   Comme $n \geq 0$ et $\varepsilon(\Omega(\mathbb{N})) = \{0,1\}$, $2n+3-\varepsilon(a^{'}) \geq 2$. Par conséquent, $W(3^t)(|W(3^t)|) > 1$.
   Ce qui établit (a).
   Si $\xi(t-1) = 0$:
   Si $t = 1$ alors $\xi(t-1) = 0$ car $U_{t-1} = \{i | W(3^{t-1})(i) = 1\} = \emptyset$ (puisque $W(3^{t-1}) = W(1) = e_w$). De plus, on a $W(3^t) = W(3) = w(1)$. Par conséquent, (b) est vérifiée pour $t = 1$.
   Supposons à présent $t > 1$. Comme $\sigma(3^{t-1}) > \sigma(3^0) = 0$, il existe $r > 0$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$ tels que $W(3^{t-1}) = \prod_{i=1}^{i=r} w(\alpha_i)$.
   Si $U_{t-1} = \emptyset$, $W(3^{t-1}) \in \Omega(\mathbb{N} \setminus \{0,1\})$. D'après (P2.10),
   $W(3^t) = \overline{w}(w(1).\prod_{i=1}^{i=r} w(\alpha_i - 1, 1)) = w(1).\prod_{i=1}^{i=r} w(\alpha_i - 1, 1)$,

on a $W(3^t)(|W(3^t)|) = 1$.
Si $U_{t-1} \neq \emptyset$, il existe $i_1 > i_0 = max(U_{t-1})$ tels que $\alpha_{i_1} \geq 3$. Comme $i_0 = max(U_{t-1})$ et $i_1 > i_0$ pour tous $i > i_1$ $\alpha_i \geq 2$. Choisissons i_1 comme le minimum à respecter cette condition.
Posons $a^{'} = w(1).\prod_{i=1}^{i=i_1-1} w(\alpha_i - 1)$. On a d'après (P2.10) :

$$\begin{aligned} W(3^t) &= \overline{w}(a^{'}.w(\alpha_{i_1} - 1, 1).\textstyle\prod_{i=i_1+1}^{i=r} w(\alpha_i - 1, 1)) \\ &= \overline{a^{'}}.w(\alpha_{i_1} - 1 - \varepsilon(a^{'}), 1).\textstyle\prod_{i=i_1+1}^{i=r} w(\alpha_i - 1, 1) \\ &\qquad\qquad \text{(P2.8 et car } \alpha_{i_1} - 1 > 1,\ \alpha_i - 1 > 0 \text{ pour } i \geq i_1) \end{aligned}$$

D'où $W(3^t)(|W(3^t)|) = 1$
Ce qui établit (b).

5. Soit $a \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$ et soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ tels que $a = \prod_{i=1}^{i=r} w(\alpha_i)$.
Si pour tous $i \leq r$ $\alpha_i = 1$, $(\sigma \circ \varphi)(w(0).a) = (\sigma \circ \varphi)(w(0).w(1)^{|a|}) = \sigma(2^{|a|+1}) = 0 < (\sigma \circ \varphi)(a)$ car $a \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$.
S'il existe au contraire $i_0 \leq r$ tel que pour tous $i < i_0$ $\alpha_i = 1$ et $\alpha_{i_0} > 1$ alors on a :

$$\begin{aligned} (\sigma \circ \varphi)(w(0).a) &= (\sigma \circ \varphi)(w(0).w(1)^{i_0-1}.w(\alpha_{i_0}).\textstyle\prod_{i=i_0+1}^{i=r} w(\alpha_i)) \\ &= \sigma(2^{i_0}\varphi(w(\alpha_{i_0} - 1).\textstyle\prod_{i=i_0+1}^{i=r} w(\alpha_i))) && \text{(P3.3.5)} \\ &= -1 + \textstyle\sum_{i=i_0}^{i=r} w(\alpha_i) && \text{(car } i_0 > 1) \\ &< (\sigma \circ \varphi)(a) && \text{(car } a \in \Omega(\mathbb{N}^*)) \end{aligned}$$

□

Corollaire 3.13. ***K_p^t stability genralized***
Soient $x \in 2\mathbb{N}+1$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $Ob(x) = (x_i)_{1 \leq i \leq \lambda(x)}$. Soient $t > 1$, $\beta \in \mathbb{Z}$, $a \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ tels que $(\sigma \circ \varphi)(a) > -\beta$ et $\sigma(3^t) > -\beta + 1$. Posons $r = \lambda(x)$. Alors il existe $v_1 \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$, $v_2 \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ et $\delta_1, \delta_2 \in \{0, 1\}$ tels que :

1. *Si $\varphi(S_p(x)) \in E_0$ alors $\delta_1, \delta_2 \in \{0, 1 - \xi(t-1)\}$*
2. *$K_p^t(x) \equiv v_1$*
3. *$(\sigma \circ \varphi)(v_1) = \delta_1 + \sigma(3^t) + \sum_{i=p}^{i=r} x_i$*
4. *$a.w(\beta).K_p^t(x) \equiv v_2$*
5. *$(\sigma \circ \varphi)(v_2) = \delta_2 + (\sigma \circ \varphi)(a) + \beta + \sigma(3^t) + \sum_{i=p}^{i=r} x_i$*

Démonstration. D'après la proposition (P3.8.4), nous avons $W(3^t)(|W(3^t)|) > 1 \iff \xi(t-1) = 1$ pour tous $t > 0$. Par conséquent, si $\beta \leq 0$, il s'agit du résultat énoncé dans (C3.12). Si $\beta > 0$, alors cela résulte de l'application de (P2.3.12). De plus, $v_1 \neq e_w$ car $t > 0$. □

Notation 3.4. $\boldsymbol{\mathcal{A}}$**,** $\boldsymbol{I(p, x)}$
On note $\mathcal{A}$ la partie de $\Omega(\mathbb{N}^*)$ définie par :
$\mathcal{A} = \{v \in \Omega(\mathbb{N}^*) | \exists a \in \Omega(\mathbb{N}^*), \exists n \in \mathbb{N} \text{ et } v = a.w(1).w(2)^n\}$.
On note I l'application définie par :

$$\begin{array}{cccc} I & : & \mathbb{N}^* \times (2\mathbb{N}+1) & \to & \{0, 1\} \\ & & (p, x) & \mapsto & \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(S_p(x)) \end{array}$$

Proposition 3.9. ***K_p^t stability for $t = 1$***
Soient $t = 1$, $p \in \mathbb{N}^*$, $x \in 2\mathbb{N}+1$ on a :
$(\sigma \circ \varphi)(K_p^t(x)) = \sigma(3^t) + \sum_{i=p}^{i=\lambda(x)} (Ob(x)(i)) + I(p,x)$

Démonstration. Dans toute la preuve, on gardera le plus possible la variable t sans la remplacer par sa valeur 1. Le but est de pouvoir peut être donner une idée de généralisation de cette démonstration pour toutes les valeurs de t.
Soient $t = 1$, $p \in \mathbb{N}^*$, $x \in 2\mathbb{N}+1$. posons $r = \lambda(x)$.
a) Si $p > r$
Ce cas est simple, il suffit de dérouler les définitions :

$$\begin{aligned}
(\sigma \circ \varphi)(K_p^t(x)) &= (\sigma \circ \varphi)(W(3^t).\prod_{i=p}^{i=r} (w(Ob(x)(i) - \sigma(3^t)).W(3^t))) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{définition de } K_p^t(x)) \\
&= (\sigma \circ \varphi)(W(3^t)) && (\text{car } p > r) \\
&= \sigma(3^t) && (\text{P2.3.11}) \\
&= \sigma(3^t) + \sum_{i=p}^{i=r} w(Ob(x)(i)) && (\text{car } p > r) \\
&= \sigma(3^t) + (\sum_{i=p}^{i=r} w(Ob(x)(i))) + I(p,x) && (\text{car } p > r)
\end{aligned}$$

b) Si $p \leq r$
Dans ce cas, on peut supposer $x > 1$ (id est $r \geq 1$) car dans le cas contraire $p > r$. Notons alors pour toute la suite $Ob(x) = (x_1, \ldots, x_r)$.
b.1) Si $\varphi(S_p(x)) \in E_0$
Si pour tous $i \geq p$, $x_i > 1$ alors $x_i - \sigma(3^t) = x_i - \sigma(3^1) = x_i - 1 > 0$. On a alors :

$$\begin{aligned}
(\sigma \circ \varphi)(K_p^t(x)) &= (\sigma \circ \varphi)(W(3^t).\prod_{i=p}^{i=r} (w(Ob(x)(i) - \sigma(3^t)).W(3^t))) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{définition de } K_p^t(x)) \\
&= \sigma(3^t) + \sum_{i=p}^{i=r} (x_i - \sigma(3^t) + \sigma(3^t)) && (\text{P2.3.12}) \\
&= \sigma(3^t) + \sum_{i=p}^{i=r} x_i \\
&= \sigma(3^t) + (\sum_{i=p}^{i=r} x_i) + I(p,x) && (\text{car } S_p(x) \notin \mathcal{A})
\end{aligned}$$

b.2) Si $\varphi(S_p(x)) \in E_q,\ q > 0$
Si $p = r$, $q = 1$ et $K_p^t(x) = W(3^t).w(x_p - 1).W(3^t) = w(1,0,1) \equiv w(3)$. D'où $(\sigma \circ \varphi)(K_p^t(x)) = 3 = \sigma(3^t) + x_p + 1 = \sigma(3^t) + (\sum_{i=p}^{i=r} x_i) + I(p,x)$ car $S_p(x) = w(x_p) = w(1) \in \mathcal{A}$. A partir de maintenant, on suppose donc $p < r$. Ce qui autorise alors à faire apparaître deux éléments consécutifs de $Ob(x)$ dans les expressions qui suivent. Nous avons :

$$\begin{aligned}
K_p^t(x) &= w(1).\prod_{i=p}^{i=r} (w(x_i - 1).w(1)) && (t = 1) \\
&= w(1).w(x_p - 1)(\prod_{i=p}^{i=r} (w(1).w(x_i - 1))).w(1) && (p < r)
\end{aligned}$$

On pose $R = \{v \in \Omega(\mathbb{N}^*) | \exists n \in \mathbb{N}, \alpha_1 \ldots \alpha_n \in \mathbb{N}^*, \alpha_1 \neq 1,\ v = \prod_{i=1}^{i=n} w(1, \alpha_i)\}$. Soient donc $i_1, \ldots, i_q \in \{i \in [\![p, r]\!] | x_i = 1\}$ tels que $i_1 < i_2 < \ldots < i_q$. Posons $i_{q+1} = r$. Soient $v_0, \ldots, v_q \in R$ et $\beta_0, \ldots, \beta_q \in \mathbb{N}$ tels que :

$$K_p^t(x) = \gamma_0.\prod_{j=1}^{j=q} (w(1,0).w(1)^{2\beta_j}.v_j).w(1) \textit{ et } \gamma_0 = w(1)^{\beta_0}.v_0$$

Posons également pour tous $n \geq 0$ $A_n = \gamma_0 . \prod_{j=1}^{j=n} (w(1,0).w(1)^{2\beta_j}.v_j)$.
Enfin, pour tous $n \leq q$, $\lambda > 0$, $b \in \Omega(\mathbb{N}^*)$, posons $K_n(\lambda, b) = A_n.w(\lambda).b$.

b.2.1) Propriété de $K_n(\lambda, b)$ pour $|v_n| > 0$ et $\lambda > 0$

Posons $l_n = i_n + \beta_n + 1$ et $i_{q+1} = l_q + 1$. Nous avons :

$$\begin{aligned} K_n(\lambda, b) &= A_{n-1}.w(1,0).w(1)^{2\beta_n}.w(1, x_{l_n} - 1). \prod_{j=l_n+1}^{j=i_{n+1}-1} [w(1, x_j - 1)].w(\lambda).b \\ &\equiv A_{n-1}.w(1 + 2(\beta_n + 1), x_{l_n} - 2). \prod_{j=l_n+1}^{j=i_{n+1}-1} [w(1, x_j - 1)].w(\lambda).b \end{aligned} \quad \text{(P2.2)}$$

Notons qu' il existe $s_n \geq 1$ et $x_{n,1}, \ldots, x_{n,s_n} \in \mathring{x}$ tels que $v_n = \prod_{i=1}^{i=s_n} w(1, \alpha_i) = \prod_{i=1}^{i=s_n} w(1, x_{n,i} - 1)$ car $v_n \neq e_w$. Comme $v_n \in R$, $\alpha_1 = x_{n,1} - 1 > 1$ et $\alpha_i = x_{n,i} - 1 > 0$ pour tous $i \in [\![2, s_n]\!]$.
Posons alors $\lambda_n^{'} = 1 + 2(\beta_n + 1)$ et
$b_n^{'}(\lambda, b) = w(x_{l_n} - 2). \prod_{j=l_n+1}^{j=i_{n+1}-1} [w(1, x_j - 1)].w(\lambda).b$.
Ce qui permet d'écrire :

$$K_n(\lambda, b) \equiv A_{n-1}.w(\lambda_n^{'}).b_n^{'}(\lambda, b)$$

Notons que $\lambda_n^{'} \geq 3 > 1$ et $b_n^{'}(\lambda, b) \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ car $x_{l_n} > 2$ et $x_{l_n+i} > 1$ pour tous $i \in [\![1, i_{n+1} - l_n + 1]\!]$. Par conséquent, d'après (P2.3.12) :

$$\begin{aligned} (\sigma \circ \varphi)(w(\lambda_n^{'}).b_n^{'}(\lambda, b)) &= \lambda_n^{'} + x_{l_n} - 2 + (\textstyle\sum_{j=l_n+1}^{j=i_{n+1}-1} x_j) + (\sigma \circ \varphi)(w(\lambda).b) \\ &= \lambda_n^{'} - 2 + (\textstyle\sum_{j=l_n}^{j=i_{n+1}-1} x_j) + (\sigma \circ \varphi)(w(\lambda).b) \\ &= 1 + 2\beta_n + (\textstyle\sum_{j=l_n}^{j=i_{n+1}-1} x_j) + (\sigma \circ \varphi)(w(\lambda).b) \\ &= 1 + 2\beta_n + (\sigma \circ \varphi)(v_n) + (\sigma \circ \varphi)(w(\lambda).b) \end{aligned}$$

Pour résumer, on vient de montrer que pour tous $n \leq q$, $\lambda > 0$, $b \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ tels que $|v_n| > 0$, il existe $\lambda_n^{'} > 1$ et $b_n^{'}(\lambda, b) \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ tels que :

1. $K_n(\lambda, b) \equiv A_{n-1}.w(\lambda_n^{'}).b_n^{'}(\lambda, b)$
2. $(\sigma \circ \varphi)(w(\lambda_n^{'}).b_n^{'}(\lambda, b)) = (\sigma \circ \varphi)(w(\lambda).b) + 1 + 2\beta_n + (\sigma \circ \varphi)(v_n)$

b.2.2) Propriété de $A_n.w(\lambda).b$ pour $\lambda > 1$

Montrons par récurrence sur $n \in [\![0, q]\!]$ la propriété P_n suivante :
Pour tous $\lambda > 1$, $b \in \Omega(\mathbb{N}^*)$, il existe $\lambda_0 > 1$, $b_0 \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ tels que :

1. $K_n(\lambda, b) \equiv \gamma_0.w(\lambda_0).b_0$
2. $(\sigma \circ \varphi)(w(\lambda_0).b_0) = (\sigma \circ \varphi)(w(\lambda).b) + \sum_{j=1}^{j=n} (1 + 2\beta_j + (\sigma \circ \varphi)(v_j))$

Si $n = 0$, nous avons $K_n(\lambda, b) = K_0(\lambda, b) = A_0.w(\lambda).b = \gamma_0.w(\lambda).b$. Il suffit donc de choisir $\lambda_0 = \lambda$ et $b_0 = b$.
Supposons à présent l'hypothèse de récurrence vraie jusqu'au rang n et montrons la au rang $n + 1 \leq q$. On a :
$K_{n+1}(\lambda, b) = A_{n+1}.w(\lambda).b = A_n.w(1,0).w(1)^{2\beta_{n+1}}.v_{n+1}.w(\lambda).b$.
Posons pour tous $n \leq q$, $\theta_n = \sum_{j=1}^{j=n} (1 + 2\beta_j + (\sigma \circ \varphi)(v_j))$.

b.2.2.1) Si $|v_{n+1}| = 0$:

On a :

$$\begin{aligned} K_{n+1}(\lambda, b) &\equiv A_n.w(1 + 2\beta_{n+1} + 1).w(\lambda - 1).b \quad \text{(P2.2)} \\ &\equiv K_n(1 + 2\beta_{n+1} + 1, w(\lambda - 1).b) \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, il existe $\lambda_0 > 1$, $b_0 \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ tels que :

1. $K_{n+1}(\lambda, b) \equiv \gamma_0.w(\lambda_0).b_0$
2. $(\sigma \circ \varphi)(w(\lambda_0).b_0) = (\sigma \circ \varphi)(w(1+2\beta_{n+1}+1).w(\lambda-1).b) + \theta_n$

On a alors :

$$\begin{aligned}
(\sigma \circ \varphi)(w(\lambda_0).b_0) &= (\sigma \circ \varphi)(w(1+2\beta_{n+1}+1).w(\lambda-1).b) + \theta_n \\
&= (1+2\beta_{n+1}+1) + (\lambda-1) + (\sigma \circ \varphi)(b) + \theta_n \qquad \text{(P2.3.12)} \\
&= 1 + 2\beta_{n+1} + (\sigma \circ \varphi)(v_{n+1}) + \lambda + (\sigma \circ \varphi)(b) + \theta_n \\
&\hfill (|v_{n+1}| = 0) \\
&= \lambda + (\sigma \circ \varphi)(b) + \theta_{n+1} \qquad \text{(cf. définition de } \theta_n) \\
&= (\sigma \circ \varphi)(w(\lambda).b) + \theta_{n+1} \qquad \text{(P2.3.12)}
\end{aligned}$$

Ce qui est le résultat attendu.

b.2.2.2) Si $|v_{n+1}| > 0$:

D'après (b.2.1), il existe $\lambda_{n+1} > 1$ et $b_{n+1} \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ tels que :

1. $K_{n+1}(\lambda, b) \equiv A_n.w(\lambda_{n+1}).b_{n+1}(\lambda, b)$
2. $(\sigma \circ \varphi)(w(\lambda_{n+1}).b_{n+1}(\lambda, b)) = (\sigma \circ \varphi)(w(\lambda).b) + 1 + 2\beta_{n+1} + (\sigma \circ \varphi)(v_{n+1})$

Par hypothèse de récurrence, il existe $\lambda_0 > 1$, $b_0 \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ tels que :

1. $K_{n+1}(\lambda, b) \equiv \gamma_0.w(\lambda_0).b_0$
2. $(\sigma \circ \varphi)(w(\lambda_0).b_0) = (\sigma \circ \varphi)(w(\lambda_{n+1}).b_{n+1}(\lambda, b)) + \theta_n$

On a alors :

$$\begin{aligned}
(\sigma \circ \varphi)(w(\lambda_0).b_0) &= (\sigma \circ \varphi)(w(\lambda_{n+1}).b_{n+1}(\lambda, b)) + \theta_n \\
&= (\sigma \circ \varphi)(w(\lambda).b) + 1 + 2\beta_{n+1} + (\sigma \circ \varphi)(v_{n+1}) + \theta_n \\
&= (\sigma \circ \varphi)(w(\lambda).b) + \theta_{n+1} \qquad \text{(cf. définition de } \theta_n)
\end{aligned}$$

Ce qui est le résultat attendu.

Par conséquent, (P_n) est vraie pour tous $n \leq q$.

b.2.3) Propriété de $K_q(1, e_w)$:

Notons pour commencer que :

$$\begin{aligned}
|v_q| = 0 &\iff v_q = e_w \\
&\iff \forall k > i_q,\ x_k = 2 \qquad \text{(définitions de } i_q \text{ et } v_q) \\
&\iff \exists j \geq 1,\ \forall k > i_j\ x_k = 2 \\
&\hfill (w(1,0).w(1)^{2\beta_j}.v_q.w(1) \text{ suffixe de } K_p^t(x)) \\
&\iff \exists i \geq p,\ x_i = 1\ et\ \forall j > i\ x_j = 2 \qquad \text{(définition de } K_p^1(x)) \\
&\iff \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(S_p(x)) = 1 \qquad \text{(définition de } \mathbb{1}_{\mathcal{A}}) \\
&\iff I(p, x) = 1 \qquad \text{(définition de } I(p,x))
\end{aligned}$$

b.2.3.1) Si $|v_q| = 0$:

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
K_q(1, e_w) &= A_q.w(1).e_w \\
&= \gamma_0.\prod_{j=1}^{j=q}(w(1,0).w(1)^{2\beta_j}.v_j).w(1) \qquad \text{(cf. définition de } A_q) \\
&= A_{q-1}.w(1,0).w(1)^{2\beta_q}.v_q.w(1) \\
&= A_{q-1}.w(1,0).w(1)^{2\beta_q+1} \qquad \text{(car } |v_q| = 0) \\
&\equiv A_{q-1}.w(1 + 2(\beta_q + 1)) \qquad \text{(P2.2)} \\
&\equiv K_{q-1}.(1 + 2(\beta_q + 1), e_w) \qquad \text{(cf. définition de } K_n)
\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après (P_{q-1}), il existe $\lambda_0 > 1$ et $b_0 \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ tels que :

1. $K_{q-1}(1+2(\beta_q+1), e_w) \equiv \gamma_0.w(\lambda_0).b_0$
2. $(\sigma \circ \varphi)(w(\lambda_0).b_0) = (\sigma \circ \varphi)(w(1+2(\beta_q+1)).e_w) + \theta_{q-1}$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
(\sigma \circ \varphi)(K_q(1, e_w)) &= (\sigma \circ \varphi)(\gamma_0.w(\lambda_0).b_0) && (P_{q-1}.1)\\
&= (\sigma \circ \varphi)(\gamma_0) + (\sigma \circ \varphi)(w(1+2(\beta_q+1)).e_w) + \theta_{q-1} && \\
& && (\text{P2.3.12})\\
&= (\sigma \circ \varphi)(\gamma_0) + 2 + 1 + 2\beta_q + \theta_{q-1} && (\text{P2.3.12})\\
&= (\sigma \circ \varphi)(\gamma_0) + 2 + 1 + 2\beta_q + (\sigma \circ \varphi)(v_q) + \theta_{q-1} && (|v_q| = 0)\\
&= (\sigma \circ \varphi)(\gamma_0) + 2 + \theta_q && (\text{cf. définition de } \theta_q)\\
&= (\sigma \circ \varphi)(\gamma_0) + 1 + \theta_q + I(p,x) && \\
& && (\text{car } I(p,x) = 1 \iff v_q = e_w)\\
&= \sigma(3^t) + (\sigma \circ \varphi)(\gamma_0) + \theta_q + I(p,x) && (\text{car } \sigma(3^t) = 1)
\end{aligned}$$

b.2.3.2) Si $|v_q| > 0$:

D'après (b.2.1), il existe $\lambda_q > 1$ et $b_q \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ tels que :

1. $K_q(1, e_w) \equiv A_{q-1}.w(\lambda_q).b_q(1, e_w)$
2. $(\sigma \circ \varphi)(w(\lambda_q).b_q(\lambda, b)) = (\sigma \circ \varphi)(w(1).e_w) + 1 + 2\beta_q + (\sigma \circ \varphi)(v_q)$

Par conséquent, d'après (P_{q-1}), il existe $\lambda_0 > 1$ et $b_0 \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ tels que :

1. $K_{q-1}(\lambda_q, b_q(1, e_w)) \equiv \gamma_0.w(\lambda_0).b_0$
2. $(\sigma \circ \varphi)(w(\lambda_0).b_0) = (\sigma \circ \varphi)(w(\lambda_q).b_q(1, e_w)) + \theta_{q-1}$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
(\sigma \circ \varphi)(K_q(1, e_w)) &= (\sigma \circ \varphi)(\gamma_0.w(\lambda_0).b_0) && (P_{q-1}.1)\\
&= (\sigma \circ \varphi)(\gamma_0) + (\sigma \circ \varphi)(w(\lambda_0).b_0) && (\text{P2.3.12})\\
&= (\sigma \circ \varphi)(\gamma_0) + (\sigma \circ \varphi)(w(\lambda_q).b_q(1, e_w)) + \theta_{q-1} && (P_{q-1}.2)\\
&= (\sigma \circ \varphi)(\gamma_0) + 1 + 1 + 2\beta_q + (\sigma \circ \varphi)(v_q) + \theta_{q-1} && (\text{b.2.1})\\
&= (\sigma \circ \varphi)(\gamma_0) + 1 + \theta_q && (\text{cf. définition de } \theta_q)\\
&= (\sigma \circ \varphi)(\gamma_0) + 1 + \theta_q + I(p,x) && \\
& && (\text{car } |v_q| > 0 \iff I(p,x) = 0)\\
&= \sigma(3^t) + (\sigma \circ \varphi)(\gamma_0) + \theta_q + I(p,x) && (\text{car } \sigma(3^t) = 1)
\end{aligned}$$

b.2.4) Propriété de $K_p^t(x)$:

D'après (b.2.3.1) et (b.2.3.2), nous avons pour tous $v_q \in R$:

$$(\sigma \circ \varphi)(K_q(1, e_w)) = (\sigma \circ \varphi)(\gamma_0) + \sigma(3^t) + \theta_q + I(p,x)$$

Or $K_q(1, e_w) = A_q.w(1) = \gamma_0.\prod_{j=1}^{j=q}(w(1,0).w(1)^{2\beta_j}.v_j).w(1) = K_p^t(x)$. On a :

$$\begin{aligned}
(\sigma \circ \varphi)(K_p^t(x)) &= \sigma(3^t) + (\sigma \circ \varphi)(\gamma_0) + \theta_q + I(p,x)\\
&= \sigma(3^t) + (\sigma \circ \varphi)(\gamma_0) + I(p,x) + \sum_{j=1}^{j=q}(1 + 2\beta_j + (\sigma \circ \varphi)(v_j))\\
& \qquad (\text{cf. définition de } \theta_q)\\
&= \sigma(3^t) + I(p,x) + \sum_{i=p}^{i=r} x_i \qquad (\text{par définition de } x_{i_j},\ \beta_j,\ v_j)
\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration de la partie b) et clôt la démonstration de la proposition. □

4 H_0 and H_1

4.1 E_0

Proposition 4.1. *H_0 **est vraie.***
Soit $x \in E_0$, alors $\sigma(\bar{f}(x)) < \sigma(x)$ et H_0 est vraie.

Démonstration. Soit $x \in E_0$ et soit $r > 0$ tel que $Ob(x) = (k_i)_{1 \leq i \leq r}$. On a pour tous $i > 0, k_i > 1$ car $x \in E_0$.
Si $k_1 > 2$, on a d'après la proposition P1.3

$$\begin{aligned}\sigma(\bar{f}(x)) &= k_1 - 2 + 1 + \textstyle\sum_{i=2}^{r}(k_i - 1 + 1)\\ &= -1 + \textstyle\sum_{i=1}^{r} k_i\\ &= \sigma(x) - 1\\ &< \sigma(x)\end{aligned}$$

Supposons à présent $k_1 = 2$. Si $r = 1$, on a : $f(x) = (3(1+2^2)+1)/2 = 2^3$. D'où $\sigma(\bar{f}(x)) = 0 < 2 = \sigma(x)$. Si $r > 1$ et si il existe $i_0 > 1$ tel que $k_{i_0+1} > 2$ et pour tous $i \leq i_0$, $k_i = 2$. Autrement dit, $x = \varphi(w(2)^{i_0}.K^0_{i_0+1}(x))$. On a alors d'après le corollaire de la dérivation compacte (C3.4) :

$$\begin{aligned}f(x) &= 2\varphi(w(0).w(1)^{2(i_0-1)}.K^1_{i_0+1}(x))\\ &= 2\varphi(w(0).w(1)^{2(i_0-1)+1}.w(k_{i_0+1}-1).K^1_{i_0+2}(x)) && (r > 1)\\ &= 2^{2i_0+1}\varphi(w(k_{i_0+1}-2).K^1_{i_0+2}(x)) && \text{(P3.3.5)}\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\sigma(\bar{f}(x)) &= k_{i_0+1} - 2 + 1 + \textstyle\sum_{i=i_0+2}^{r}(k_i - 1 + 1) && (k_{i_0+1} > 2)\\ &= -1 + \textstyle\sum_{i=i_0+1}^{r} k_i\\ &= -1 - 2i_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{r} k_i\\ &= \sigma(x) - 2i_0 - 1\\ &< \sigma(x)\end{aligned}$$

Si maintenant pour tous $i \geq 1$, $k_i = 2$, on a toujours d'après le corollaire de la dérivation compacte (C3.4) :

$$\begin{aligned}f(x) &= 2\varphi(w(0).w(1)^{2r-1})\\ &= 2^{2r}\varphi(w(0)) && \text{(P3.3.5)}\\ &= 2^{2r+1}\end{aligned}$$

On en déduit $\sigma(\bar{f}(x)) = 0 < \sigma(x)$. On a donc montré que pour tout x de E_0 qu'il existe un entier t tel que $\sigma(\bar{f}^t(x)) < \sigma(x)$. Il suffit de prendre dans ce cas $t = 1$. H_0 est donc vraie. □

4.2 E_1 and $k_1 = 1$

Lemme 4.1. ***Derivation in** E_n, $n > 0$*
Soient $n > 0$, $x \in E_n$, $r = \lambda(x) \geq 3$ tels que $Ob(x) = (k_1, \ldots, k_r)$ et tels que :

1. $\exists i_0 \in [\![2, r]\!],\ \forall i \in [\![2, i_0]\!]\ k_i = 2$

2. $k_1 = 1$ *et* $k_{i_0+1} > 2$

Soit $t \in [\![1, i_0 + 1]\!]$, *on a :*

$$\bar{f}^t(x) = \bar{\varphi}(w(2(i_0 - (t-1))).W(3^{t-1}).w(k_{i_0+1} - 2 - \sigma(3^{t-1})).K^t_{i_0+2}(x))$$

Démonstration. Montrons l'égalité ci-dessus par récurrence sur t.
Par hypothèse, on a :

$$x = \varphi(w(1).w(2)^{i_0-1}.w(k_{i_0+1}).\prod_{i=i_0+2}^{i=r} w(k_i))$$

D'après le corollaire de la dérivation compacte (C3.4), on a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2\varphi(w(-1,1,1).K^1_3(x)) \\
&= \varphi(w(1,0,1).K^1_3(x)) && \text{(P3.8.1)} \\
&= \varphi(w(1,0,1).w(1)^{2(i_0-3+1)+1}.w(k_{i_0+1}-1).K^1_{i_0+2}(x)) && (r \geq i_0+1) \\
&= \varphi(w(2i_0).w(k_{i_0+1}-2).K^1_{i_0+2}(x)) && \text{(P2.2)} \\
&= 2^{1-1}\varphi(w(2(i_0-(1-1))).W(3^{1-1}).w(k_{i_0+1}-2-\sigma(3^{1-1})).K^1_{i_0+2}(x))
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'hypothèse de récurrence est vraie pour $t = 1$. Supposons à présent l'hypothèse de récurrence vraie jusqu'au rang t et montrons la au rang $t+1$.
Soit donc $t \in [\![1, i_0 + 1]\!]$, par hypothèse de récurrence, on a $\bar{f}^t(x) = \bar{\varphi}(v)$ avec :

$$v = w(2(i_0 - (t-1))).W(3^{t-1}).w(k_{i_0+1} - 2 - \sigma(3^{t-1})).K^t_{i_0+2}(x)$$

Comme $t + 1 \leq i_0 + 1$, $i_0 - (t-1) > 0$, de plus $k_{i_0+1} > 2$; par conséquent, $w(2(i_0 - (t-1)), k_{i_0+1} - 2) \in B_2$. On en déduit donc, d'après le corollaire de la dérivation compacte généralisée (C3.3), $\varphi(v)$ impair d'où $\varphi(v) = \bar{\varphi}(v)$ et :

$$\begin{aligned}
\bar{f}^{t+1}(x) &= (Odd \circ f)(\bar{f}^t(x)) && \text{(définition de } \bar{f}) \\
&= Odd(2\varphi(w(2(i_0-t)).W(3^t).w(k_{i_0+1}-2-\sigma(3^t)).K^{t+1}_{i_0+2}(x))) \\
& && \text{(C3.3)} \\
&= \bar{\varphi}(w(2(i_0-t)).W(3^t).w(k_{i_0+1}-2-\sigma(3^t)).K^{t+1}_{i_0+2}(x))
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'hypothèse est donc vraie pour $t+1$ et la récurrence terminée.
□

Lemme 4.2. *Boundary in* E_1
Soient $r \geq 3$, $x \in E_1$ *tels que* $Ob(x) = (k_1, \ldots, k_r)$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ *et* $W(x) \notin \{v \in \Omega(\mathbb{N}^*) | \exists n \in \mathbb{N}, v = w(1).w(2)^n\}$. *Alors on a :*

$$\exists t \leq 4,\ \sigma(\bar{f}^t(x)) < \sigma(x)$$

Démonstration. Soit x comme dans l'énoncé, il existe donc $i_0 \in [\![2, r[\![$ tel que pour tous $i \in [\![2, i_0]\!]$, $k_i = 2$ et $k_{i_0+1} > 2$. Notons qu'on ne peut pas avoir $r < 3$ car $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ et $k_{i_0+1} > 2$. Soient $t \in [\![3, i_0+1]\!]$ et $\beta = -k_{i_0+1} + 2 + \sigma(3^{t-1})$, on a d'après le lemme de la dérivation dans E_n (L4.1) :

$$\bar{f}^t(x) = \bar{\varphi}(w(2(i_0 - (t-1))).W(3^{t-1}).w(-\beta).K^t_{i_0+2}(x))$$

Nous avons :

— $(\sigma \circ \varphi)(W(3^{t-1})) = \sigma(3^{t-1}) > -(k_{i_0+1} - 2 - \sigma(3^{t-1}))$ car $k_{i_0+1} > 2$

— $\sigma(3^t) > -(k_{i_0+1} - 2 - \sigma(3^{t-1})) + 1$ car $\sigma(3^t) = \sigma(3^{t-1}) + \xi(t-1) + 1$ (L2.5) et $k_{i_0+1} > 2$

Par conséquent, comme $t > 1$, d'après le corollaire de K_p^t-stabilité (C3.13), il existe $v \in \Omega(\mathbb{N}^*)$, $\delta \in \{0, 1\}$ tel que :

— $v \equiv W(3^{t-1}).w(k_{i_0+1} - 2 - \sigma(3^{t-1})).K_{i_0+2}^t(x)$

— $(\sigma \circ \varphi)(v) = \sigma(3^{t-1}) + k_{i_0+1} - 2 - \sigma(3^{t-1}) + \sigma(3^t) + (\sum_{i=i_0+2}^{i=r} k_i) + \delta$

— $\delta \leq 1 - \xi(t-1)$

On en déduit :

$$\begin{aligned} (\sigma \circ \varphi)(v) &\leq -1 - \xi(t-1) + \sigma(3^t) + \textstyle\sum_{i=i_0+1}^{i=r} k_i \\ &\leq \sigma(3^{t-1}) + \textstyle\sum_{i=i_0+1}^{i=r} k_i && \text{(L2.5)} \end{aligned}$$

De plus d'après la propriété de l'équivalence à droite (P2.3.5), on a :

$$\bar{f}^t(x) = \bar{\varphi}(w(2(i_0 - (t-1))).v)$$

Soit $t_0 = i_0 + 1$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{f}^{t_0}(x)) &= (\sigma \circ \varphi)(w(0).v) && \text{(P2.3.5)} \\ &< (\sigma \circ \varphi)(v) && \text{(P3.8.5 car } k_{i_0+1} > 2) \\ &< \sigma(3^{t_0-1}) + \textstyle\sum_{i=i_0+1}^{i=r} k_i && \text{(cf. plus haut)} \\ &< \sigma(3^{t_0-1}) - 2i_0 + 1 + \sigma(x) && \text{(définition de } i_0) \\ &< \sigma(3^{t_0-1}) - 2t_0 + 3 + \sigma(x) && (i_0 = t_0 - 1) \end{aligned}$$

Si $i_0 = 2$, alors, d'après ce qui précède, $\sigma(\bar{f}^3(x)) < \sigma(3^2) - 3 + \sigma(x) = \sigma(x)$. De même si $i_0 = 3$ on a $\sigma(\bar{f}^4(x)) < \sigma(3^3) - 2 * 4 + 3 + \sigma(x) = \sigma(x) - 1 < \sigma(x)$. Supposons à présent $i_0 > 3$. Supposons également qu'on ait $\xi(t-1) = 1$, autrement dit, d'après (P3.8.4), t est tel que $W(3^t)(|W(3^t)|) > 1$. Il en existe car pour $t = 4$, on a $W(3^t) = W(3^4) = w(4, 2)$ et $t = 4 < i_0 + 1$. De plus d'après (C3.13), $\delta = 0$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{f}^t(x)) &= (\sigma \circ \varphi)(w(2(i_0 - (t-1))).v) && \text{(P2.3.5)} \\ &= 2(i_0 - (t-1)) + (\sigma \circ \varphi)(v) && (i_0 > t-1 \text{ et P2.3.12)} \\ &= 2(i_0 - (t-1)) - 2 + \sigma(3^t) + (\textstyle\sum_{i=i_0+1}^{i=r} k_i) + \delta && \text{(cf. } (\sigma \circ \varphi)(v)) \\ &= 1 - 2t + \sigma(3^t) + \delta + \sigma(x) && \text{(définition de } i_0) \\ &= 1 - 2t + \sigma(3^t) + \sigma(x) && (\delta = 0) \\ &= 1 - 2t + \lfloor t\tfrac{ln(3)}{ln(2)} \rfloor + \sigma(x) && \text{(P1.2)} \\ &< 1 - 2t + t\tfrac{ln(3)}{ln(2)} + \sigma(x) && (t > 0 \text{ et P3.8.3)} \end{aligned}$$

Par ailleurs, $t \geq 3 > \frac{ln(2)}{2ln(2) - ln(3)}$ d'où $1 < t\frac{2ln(2) - ln(3)}{ln(2)}$ et $1 - 2t + t\frac{ln(3)}{ln(2)} < 0$. Par conséquent, si ($\xi(t-1) = 1$ et $t < i_0 + 1$) alors $\sigma(\bar{f}^t(x)) < \sigma(x)$. Comme indiqué plus haut, c'est le cas de $t = 4$. Par conséquent, $\sigma(\bar{f}^4(x)) < \sigma(x)$ pour tous $i_0 > 3$. Ceci clôt donc la démonstration et il existe bien $t \leq 4$ tel que $\sigma(\bar{f}^t(x)) < \sigma(x)$. □

Proposition 4.2. *H_1 **avec** $k_1 = 1$*
Soient $x \in E_1$, $r \geq 1$ et $Ob(x) = (k_i)_{1 \leq i \leq r}$ tel que $k_1 = 1$ alors

$$x \text{ vérifie } H_1 \text{ et il existe } t \leq 4 \text{ tel que } \sigma(\bar{f}^t(x)) < \sigma(x).$$

Démonstration. Soient $r \geq 1$ et $x \in E_1$ tels que $Ob(x) = (k_1, \ldots, k_r)$ et $k_1 = 1$. Si $r = 1$, $x = 1 + 2^1$, on a d'après proposition P1.3 :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 + 2^0(1+2) = 1 + 2^2 \\ \sigma(\bar{f}(x)) &= 2 = k_1 + 1 > \sigma(x) \\ f^2(x) &= 2 + 2^1(1+2) = 2^3 \\ \sigma(\bar{f}^2(x)) &= 0 = \sigma(x) - 1 < \sigma(x) \end{aligned}$$

Supposons à présent $r > 1$. D'après le corollaire de la dérivation compacte (C3.4) nous avons :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\varphi(w(k_1 - 2).K_2^1(x)) \\ &= 2\varphi(w(-1, 1, k_2 - 1).K_3^1(x)) && \text{(car } k_1 = 1 \text{ et } r > 1) \\ &= \varphi(w(1, 0, k_2 - 1).K_3^1(x)) && \text{(P3.8.1)} \\ &= \varphi(w(2, k_2 - 2).K_3^1(x)) && \text{(P2.2)} \end{aligned}$$

Comme $k_2 > 0$, à nouveau d'après (C3.4), nous avons :

$$\begin{aligned} f^2(x) &= 2\varphi(w(0, 1, k_2 - 3).K_3^2(x)) \\ &= 2^3\varphi(w(k_2 - 4).K_3^2(x)) && \text{(P3.3.5)} \end{aligned}$$

1. $\underline{k_2 > 2 :}$
   Nous avons :
   - $(\sigma \circ \varphi)(w(1)) > 0 \geq -(k_2 - 3)$ car $k_2 > 2$
   - $W(3^2) = w(3)$ et donc $W(3^2)(|W(3^2)|) > 1$
   - $(\sigma \circ \varphi)(W(3^2)) = 3 > 1 \geq -(k_2 - 3) + 1$

   Par conséquent, d'après le corollaire de K_p^t-stabilité (C3.13), il existe $v \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ tel que :
   - $v \equiv w(1).w(k_2 - 3).K_3^2(x)$
   - $(\sigma \circ \varphi)(v) = 1 + k_2 - 3 + 3 + \sum_{i=3}^{i=r} k_i = \sigma(x)$

   On en déduit :

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{f}^2(x)) &= (\sigma \circ \varphi)(w(0, 1, k_2 - 3).K_3^2(x)) && \text{(cf. plus haut)} \\ &= (\sigma \circ \varphi)(w(0).v) && \text{(P2.3.5)} \\ &< (\sigma \circ \varphi)(v) && \text{(P3.8.5)} \\ &< \sigma(x) \end{aligned}$$

2. $\underline{k_2 = 2 :}$
   Posons l'ensemble $A = \{v \in \Omega(\mathbb{N}^*) | \exists n \in \mathbb{N}, v = w(1).w(2)^n\}$.

(a) $\underline{W(x) \in A}$:
Dans ce cas, $x = \varphi(w(1).w(2)^{r-1})$ et nous avons :

$$\begin{aligned} f(x) &= \varphi(w(2, k_2 - 2).K_3^1(x)) && \text{(cf. plus haut)} \\ &= \varphi(w(2,0).w(1)^{2(r-3+1)+1}) \\ & && \text{(définition de } K_3^1 \text{ et car } \sigma(3^1) = 1) \\ &= \varphi(w(2r)) && \text{(P2.2)} \end{aligned}$$

On note que $\sigma(f(x)) = 2r = \sigma(x) + 1$. Poursuivons la dérivation :

$$\begin{aligned} \bar{f}^3(x) &= (\bar{f}^2 \circ \varphi)(w(2r)) \\ &= (\bar{f} \circ \varphi)(w(2(r-1), 1)) && \text{(C3.4 car } r > 0) \\ &= \bar{\varphi}(w(2(r-2), 3) && \text{(C3.4 car } r > 1) \end{aligned}$$

On note que $\sigma(\bar{f}^3(x)) = 2r - 1 = \sigma(x)$ si $r > 2$.
$\underline{\text{Si } r = 2}$, alors $\bar{f}^3(x) = \bar{\varphi}(w(0,3))$ d'où d'après (P3.8.5), $\sigma(\bar{f}^3(x)) < 3 = \sigma(x)$.
Autrement si $\underline{r > 2}$, on a d'après (C3.4) :
$\bar{f}^4(x) = \bar{\varphi}(w(2(r-3), 1, 2, 1))$.
$\underline{\text{Si } r = 3}$, à nouveau d'après (P3.8.5), on a $\sigma(\bar{f}^4(x))) < 4 < \sigma(x) = 5$.
Si au contraire, $\underline{r > 3}$, $\sigma(\bar{f}^4(x)) = 2(r-3) + 4 = 2r - 2 = \sigma(x) - 1 < \sigma(x)$.

(b) $\underline{W(x) \notin A}$:
Comme $W(x) \notin A$, $r \geq 3$ car si $r = 2$ alors $W(x) = w(1,2)$. Par conséquent, d'après (L4.2), il existe $t \leq 4$ tel que $\sigma(\bar{f}^t(x)) < \sigma(x)$.

□

4.3 E_1 and $k_1 > 1$ (ONGOING)

Proposition 4.3. *H_1 **avec** $x_\alpha = 1$, $1 < \alpha \leq r$, $x_1 = 3$ **TODO***
Soient $x \in E_1$, $r > 1$, $Ob(x) = (x_i)_{1 \leq i \leq r}$ et soit $1 < \alpha \leq r$ tel que $x_\alpha = 1$ et $x_1 = 3$, alors x vérifie H_1.

Démonstration. **Un point difficile.** □

Proposition 4.4. *H_1 **avec** $x_\alpha = 1$, $1 < \alpha \leq r$ **avec** $x_1 \neq 3$*
Soient $x \in E_1$, $r > 1$, $Ob(x) = (x_i)_{1 \leq i \leq r}$ et soit $1 < \alpha \leq r$ tel que $x_\alpha = 1$ et $x_1 \neq 3$, alors x vérifie H_1.

Démonstration. Par hypothèse, nous avons :

$$x = \varphi((\textstyle\prod_{i=1}^{i=\alpha-1} w(x_i)).w(1).(\prod_{i=\alpha+1}^{i=r} w(x_i))).$$

On en déduit, d'après (C3.3) :

$$f(x) = 2\varphi(w(x_1 - 2).K_{2,\alpha-1}^1(x).w(0).K_{\alpha+1,r}^1(x)).$$

1. Si $x_1 = 2$:
   D'après (P3.2), $K_2^1(x) \in \widetilde{\Omega(\mathbb{N}^*)}$. Par conséquent, il existe $v \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ tel que $v \equiv K_2^1(x)$. Par ailleurs, d'après (P3.9), il existe $\delta \in \{0,1\}$ tel que $(\sigma \circ \varphi)(K_2^1(x)) = \delta + \sigma(3^1) + \sum_{i=2}^{i=r} x_i$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\sigma(\bar{f}(x)) &= (\sigma \circ \varphi)(w(0).K_2^1(x)) \\
&= (\sigma \circ \varphi)(w(0).v) && \text{(P2.3.5)} \\
&< (\sigma \circ \varphi)(v) && \text{(P3.8.5 car } (\sigma \circ \varphi)(v) > 0) \\
&< \delta + \sigma(3^1) + \textstyle\sum_{i=2}^{i=r} x_i && \text{(définition de } (\sigma \circ \varphi)(v)) \\
&< \delta + \sigma(x) - 1 && (x_1 = 2 \text{ et } \sigma(3^1) = 1) \\
&< \sigma(x) && (\delta \leq 1)
\end{aligned}$$

2. Si $x_1 > 2$:
   Posons pour tous $t \geq 1$, $a_t = \prod_{i=2}^{i=\alpha-1} (W(3^t).w(x_i - \sigma(3^t)))$ si $\alpha > 2$ et $a_t = e_w$ si $\alpha = 2$. On a $K_{2,\alpha-1}^1(x) = a_1.w(1)$.
   (a) Si $K_{\alpha+1,r}^1(x) \in M_0$:
   Ceci ne peut être le cas que si $\alpha < r$ car si α valait r, $K_{\alpha+1,r}^1(x) = W(3^1) = w(1) \notin M_0$.
   Comme $K_{\alpha+1,r}^1(x) \in M_0$, il existe $i_0 > \alpha$ tel que $x_{i_0} - 1 > 1$ et pour tous $i \in [\![\alpha+1, i_0]\!]$ $x_i - 1 = 1$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2\varphi(w(x_1 - 2).K_{2,\alpha-1}^1(x).w(0).K_{\alpha+1,r}^1(x)) \\
&= 2\varphi(w(x_1 - 2).a_1.w(1,0).K_{\alpha+1,r}^1(x)) && \text{(définition de } a_1) \\
&= 2\varphi(w(x_1 - 2).a_1.w(1,0).w(1)^{1+2(i_0-1-(\alpha+1)+1)}. \\
&\quad w(x_{i_0} - 1).K_{i_0+1,r}^1(x)) && \text{(définition de } i_0) \\
&= 2\varphi(w(x_1 - 2).a_1.w(1,0).w(1)^{1+2(i_0-\alpha-1)}.w(x_{i_0}\text{-}1).K_{i_0+1,r}^1(x)) \\
&= 2\varphi(w(x_1 - 2).a_1.w(1 + 2(i_0 - \alpha)).w(x_{i_0} - 2).K_{i_0+1,r}^1(x)) \\
& && \text{(P2.2)}
\end{aligned}$$

   Comme $K_{2,\alpha-1}^1(x) \in \Omega(\mathbb{N}^*)$, $a_1 \in \Omega(\mathbb{N}^*)$. De plus, on a $x_1 > 2$, $i_0 > \alpha$, $x_{i_0} > 2$, $K_{i_0+1}^1(x) \in \Omega(\mathbb{N}^*)$. Par conséquent, d'après (P2.3.12) :

$$\begin{aligned}
\sigma(\bar{f}(x)) &= x_1 - 2 + (\sigma \circ \varphi)(a_1) + 1 + 2(i_0 - \alpha) + x_{i_0} - 2 + \\
&\quad (\sigma \circ \varphi)(K_{i_0+1,r}^1(x)) \\
&= x_1 - 1 + (\sigma \circ \varphi)(a_1) + (\textstyle\sum_{i=\alpha+1}^{i=i_0} x_i) + (\sigma \circ \varphi)(K_{i_0+1,r}^1(x)) \\
& && \text{(définition de } i_0) \\
&= x_1 + (\sigma \circ \varphi)(a_1) + (\textstyle\sum_{i=\alpha+1}^{i=r} x_i) && \text{(P3.9 car } i_0 + 1 > \alpha) \\
&= (\textstyle\sum_{i=1}^{i=\alpha-1} x_i) + (\textstyle\sum_{i=\alpha+1}^{i=r} x_i) && \text{(P3.9 et définition de } a_1) \\
&= \sigma(x) - 1 && (x_\alpha = 1)
\end{aligned}$$

   (b) Si $K_{\alpha+1,r}^1(x) \notin M_0$: Comme $K_{\alpha+1,r}^1(x) \notin M_0$,

$K^1_{\alpha+1,r}(x) = w(1)^{2(r-(\alpha+1)+1)+1}$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2\varphi(w(x_1-2).K^1_{2,\alpha-1}(x).w(0).K^1_{\alpha+1,r}(x)) \\
&= 2\varphi(w(x_1-2).a_1.w(1,0).K^1_{\alpha+1,r}(x)) && \text{(définition de } a_1) \\
&= 2\varphi(w(x_1-2).a_1.w(1,0).w(1)^{2(r-\alpha)+1}) && \text{(cf. ci-dessus)} \\
&= 2\varphi(w(x_1-2).a_1.w(1+2(r-\alpha+1))) && \text{(P2.2)}
\end{aligned}$$

Comme $x_1 > 2$, $x_i > 1$ pour $i < \alpha$ et $\alpha \leq r$, $w(x_1-2).a_1.w(1+2(r-\alpha+1)) \in \Omega(\mathbb{N}^*)$. On a :

$$\begin{aligned}
\sigma(\bar{f}(x)) &= (x_1-2) + (\sigma\circ\varphi)(a_1) + (1+2(r-\alpha+1)) && \text{(P2.3.12)} \\
&= (x_1-2) + (\textstyle\sum_{i=2}^{i=\alpha-1} x_i) + (1+2(r-\alpha+1)) \\
& && \text{(définition de } a_1) \\
&= (\textstyle\sum_{i=1}^{i=\alpha} x_i) + 2(r-(\alpha+1)+1) && (x_\alpha = 1) \\
&= \sigma(x) && (x_i = 2 \text{ pour } i > \alpha)
\end{aligned}$$

i. Si $\alpha = 2$:
   Dans ce cas $\bar{f}(x)$ vaut $\bar{\varphi}(w(x_1-2).w(1+2(r-\alpha+1)))$. Si $x_1 = 3$, alors comme $\alpha \leq r$, d'après (P4.2), il existe $t \leq 4$ tel que $\sigma(\bar{f}^t(\bar{f}(x))) < \sigma(\bar{f}(x)) = \sigma(x)$. Si $x_1 > 3$ alors $\bar{f}(x) \in E_0$ et d'après (P4.1), $\sigma(\bar{f}(\bar{f}(x))) < \sigma(\bar{f}(x)) = \sigma(x)$.

ii. Si $\alpha > 2$:
   Pour rappel, nous avons :

   $$f(x) = 2\varphi(w(x_1\text{-}2).K^1_{2,\alpha\text{-}2}(x).w(x_{\alpha\text{-}1}\text{-}\sigma(3^1)).K^1_0(1+2(r\text{-}\alpha\text{+}1)))$$

   Posons $b = w(x_1-2).w(x_{\alpha-1}-\sigma(3^1))$. Comme $x_1 > 2$, et $x_{\alpha-1} = 2 > \sigma(3^1) = 1$, on a $b \in B_{|b|}$. Par conséquent, d'après (C3.4) :

   $$\begin{aligned}
   \bar{f}^2(x) &= \bar{\varphi}(w(x_1-4).K^2_{2,\alpha-2}(x).w(x_{\alpha-1}-\sigma(3^2),1,2(r\text{-}\alpha+1),1)) \\
   & && (\alpha > 2) \\
   &= \bar{\varphi}(w(x_1-4).K^2_{2,\alpha-2}(x).w(x_{\alpha-1}-3,1,2(r\text{-}\alpha+1),1)) \\
   & && (\sigma(3^2) = 3)
   \end{aligned}$$

   On a $K^2_{2,\alpha-2}(x)(|.K^2_{2,\alpha-2}(x)|) = W(3^2)(|W(3^2)|) = 3 > 1$. Par conséquent, d'après (C3.13) et (P3.8.4), il existe $v_1 \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$ tel que :

   — $v_1 \equiv K^2_{2,\alpha-2}(x)$

   — $(\sigma\circ\varphi)(v_1) = \sigma(3^2) + \sum_{i=2}^{i=\alpha-2} x_i$

   Par ailleurs puisque :

   — $(\sigma\circ\varphi)(v_1) \geq 3 > 1 \geq -(x_{\alpha-1}-3)$ car $x_{\alpha-1} \geq 2$

   — $(\sigma\circ\varphi)(w(1,2(r-\alpha+1))) = 1+2(r-\alpha+1) \geq 3 > 2 \geq -(x_{\alpha-1}-3)+1$

   — $w(1,2(r-\alpha+1))(2) = 2(r-\alpha+1) > 1$ et donc $w(1,2(r-\alpha+1)) \in L_{-(x_{\alpha-1}-3)} \subset M_0$

   d'après (C3.9), il existe $v_2 \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$ tel que :

   — $v_2 \equiv v_1.w(x_{\alpha-1}-3).w(1,2(r-\alpha+1))$

— $(\sigma \circ \varphi)(v_2) = (\sigma \circ \varphi)(v_1) + x_{\alpha-1} - 3 + 1 + 2(r - \alpha + 1)$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\bar{f}^2(x) &= \bar{\varphi}(w(x_1 - 4).K^2_{2,\alpha-2}(x).w(x_{\alpha-1} - 3, 1, 2(r - \alpha + 1), 1)) \\
&= \bar{\varphi}(w(x_1 - 4).v_1.w(x_{\alpha-1} - 3, 1, 2(r - \alpha + 1), 1)) \\
&\qquad\qquad\qquad \text{(P2.3.5 et P2.6 car } W(3^2) = w(3)) \\
&= \bar{\varphi}(w(x_1 - 4).v_2.w(1)) \\
&\qquad\qquad\qquad \text{(P2.3.5 et P2.6 car } v_1 \in \Omega^*(\mathbb{N}^*) \text{ et } r \geq \alpha)
\end{aligned}$$

Notons que $x_1 \geq 4$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\sigma(\bar{f}^2(x)) &\leq x_1 - 4 + (\sigma \circ \varphi)(v_2) + 1 \qquad \text{(P3.8.5 et P2.3.12)} \\
&\leq x_1 - 4 + (\sigma \circ \varphi)(v_1) + x_{\alpha-1} + 2(r - \alpha) + 1 \\
&\qquad\qquad\qquad \text{(définition de } v_2) \\
&\leq x_1 - 4 + (\sigma \circ \varphi)(v_1) + \textstyle\sum_{i=\alpha-1}^{i=r} x_i \\
&\qquad\qquad\qquad (x_\alpha = 1 \text{ et } x_i = 2 \text{ si } i > \alpha) \\
&\leq -1 + (\textstyle\sum_{i=1}^{i=\alpha-2} x_i) + \textstyle\sum_{i=\alpha-1}^{i=r} x_i \quad \text{(définition de } v_1) \\
&\leq \sigma(x) - 1
\end{aligned}$$

□

Proposition 4.5. *La propriété H_1 est vraie.*

Démonstration. On réunit les résultats des propositions (P4.2), (P4.3) et (P4.4). □