Syracuse notes

Eric Figuéréo
Conflans-Sainte-Honorine,
France
eric.figuereo@free.fr

21 octobre 2016

Résumé

Because nothing is "useful" for the law of nature, the best thing to do is perhaps to tackle the most useless thing. So, here's some notes about the Collatz conjecture.

Table des matières

1 Introduction

1.1 Collatz function, Odd base, Norm, Derivation

Définition 1.1. Collatz function
On appelle fonction de Collatz la fonction f définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ pair,} \\ (3n+1)/2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 1.2. *Ob* - Odd base
Notons pour tout x impair **Ob(x)** la suite $(k_i)_{1 \leq i \leq r}$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $x = 1 + 2^{k_1}(1 + 2^{k_2}(...(1 + 2^{k_r})...))$. La suite est l'application à valeurs dans le vide si x vaut 1.
On note également $\mathring{x}$ l'ensemble $\{k_1, ..., k_r\}$ si $x > 1$ et on pose $\mathring{x} = \emptyset$ sinon.

Définition 1.3. A_r- Odd sets
Posons pour tout r>0,
$A_r := \{1 + 2^{k_1}(1 + 2^{k_2}(...(1 + 2^{k_r})...)) \,|\, k_1, .., k_r \in \mathbb{N}^*\}$ et $A_0 := \{1\}$.

Lemme 1.1. ***Binary and Ob relationship***
Pour tous entier $r \geq 0$ et suite $\alpha_0, ..., \alpha_r$ tels que
$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_r$*, on a :*
$\sum_{i=0}^{r} 2^{\alpha_i} = 1 + 2^{\alpha_1 - \alpha_0}(1 + 2^{\alpha_2 - \alpha_1}(...(1 + 2^{\alpha_r - \alpha_{r-1}})...))$.

Proposition 1.1. ***BOR unicity of odd number***
Pour tout $x > 0$ impair, il existe un unique entier r et une unique suite $(k_1, \dots, k_r)$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ tels que $x \in A_r$ et $x = 1 + 2^{k_1}(1 + 2^{k_2}(...(1 + 2^{k_r})...))$.

Définition 1.4. E_n
Pour tout $n \geq 0$, on note E_n l'ensemble des entiers impairs x tels qu'il existe $r \geq 0$, $k_1, .., k_r \in \mathbb{N}^*$ tels que $Ob(x) = (k_i)_{1 \leq i \leq r}$ et $card\{i > 0 \,|\, k_i = 1\} = n$.

Remarque 1.2. ***Partition of odd natural numbers***
Les $(E_n)_{n \geq 0}$ et les $(A_r)_{r \geq 0}$ forment deux partitions des entiers impairs et pour tout x impair, $Ob(x)$ est bien défini (en utilisant la proposition P1.1).

Définition 1.5. σ norm
Soit σ la fonction définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\sigma(x) = \sum_{k \in Ob(y)} k \text{ tel qu'il existe } \alpha \text{ entier, y impair et } x = 2^{\alpha} y.$$

Proposition 1.2. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $2^{\alpha} \in 2\mathbb{N} + 1$ alors $\sigma(2^{\alpha}) = \lfloor \alpha \rfloor$.*

Définition 1.6. Odd function
Notons Odd, l'application par :

$$\begin{array}{rcccc} Odd & : & \mathbb{N} & \rightarrow & 2\mathbb{N}+1 \\ & & x & \mapsto & 2^{-max\{n \in \mathbb{N} | 2^n \text{ divise } x\}}.x \end{array}$$

Définition 1.7. Fast Collatz function $\bar{f}$
Notons $\bar{f}$ la fonction définie par $\bar{f} = Odd \circ f$.

Lemme 1.3. ***Z extension***
Soient $x \in \mathbb{Q}^{+*}$ et une suite $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ tels que $x = 1+2^{\alpha_1}(1+2^{\alpha_2}(...(1+2^{\alpha_r})...))$. Posons pour tous $i > 0$, $\beta_i = \sum_{j=0}^{j=i} \alpha_j$ (avec $\alpha_0 = 0$). Si pour tous $i > 0$, $\beta_i > 0$:

1. *$x = \sum_{j=0}^{j=r} 2^{\beta_i}$ et $x \in 2\mathbb{N}+1$*
2. *$\sigma(x) = max(\{\beta_i | i \in [\![0, r]\!]\})$ si $card(\{\beta_i | i \in [\![0, r]\!]\}) = r+1$*

Proposition 1.3. ***Simple BOR derivation***
Soient x impair et $(k_i)_{1 \leq i \leq r}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telle que $x = 1 + 2^{k_1}(1 + 2^{k_2}(...(1 + 2^{k_r})...))$. Si pour tous $i > 0$, $\sum_{j=1}^{j=i} k_j > 0$, On a :

$$f(x) = 2(1 + 2^{k_1 - 2}(1 + 2^1(1 + 2^{k_2 - 1}(1 + 2(...(1 + 2^{k_r - 1}(1 + 2))...)_5$$

Et si $Ob(x) = (k_1, ..., k_r)$ telle que $x \in E_0$ et $k_1 > 2$, on a :

$$\text{et } Ob(\bar{f}(x)) = (k_1 - 2, 1, k_2 - 1, 1, ..., k_r - 1, 1).$$

1.2 Document's goal

Définition 1.8. Length of x $\boldsymbol{\lambda(x)}$
Notons pour $x \in \mathbb{N}$, λ la fonction sur $\mathbb{N}$ définie par $\lambda(x) = card(Ob(x))$.

Définition 1.9. Counting the ones of x $\boldsymbol{\gamma(x)}$
Notons pour tout entier x, γ la fonction à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie par $\gamma(x) = n$ où n est l'unique entier tel que $x \in E_n$.

Définition 1.10. Measuring x $\boldsymbol{\mu(x)}$
Notons pour tout entier x, μ l'application à valeurs dans $\mathbb{N}^3$ définie par $\mu(x) = (\sigma(x), \gamma(x), \lambda(x))$.

Remarque 1.4. ***Order of*** $\mathbb{N}^3$
Dans la suite on utilisera, sans mention explicite, l'ordre lexicographique naturel induit par $\mathbb{N}_\sigma \times \mathbb{N}_\gamma \times \mathbb{N}_\lambda$ qu'on notera simplement $<$.

Remarque 1.5. ***Equivalents to the Syracuse conjecture***
*La **Conjecture de Syracuse** est équivalente à :*

1. *pour tout x entier, il existe un t entier tel que $\bar{f}^t(x) = 1$,*
2. *pour tous $n \geq 0$ et $x \in E_n$, il existe t tel que $\bar{f}^t(x) = 1$,*
3. *pour tous $n \geq 0$ et $x \in E_n$, il existe t tel que $\sigma(\bar{f}^t(x)) < \sigma(x)$ si $x \neq 1$.*
4. *pour tous $n \geq 0$ et $x \in E_n$, il existe t tel que $\mu(\bar{f}^t(x)) < \mu(x)$ si $x \neq 1$.*

Le but de ce document est donc d'étudier la possibilité de démontrer l'hypothèse de récurrence H_n correspondant à la quatrième équivalence de cette dernière remarque.

2 Tools

2.1 Words

Notation 2.1. words

1. Pour toute suite finie $(k_i)_{0 \leq i \leq n}$ d'éléments de $\mathbb{Z}$, on note $w(k_1, ..., k_n)$ le mot associé ;
2. On appelle longueur d'un mot $w(k_1, ..., k_n)$ l'application $|\bullet|$ définie par $|w(k_1, ..., k_n)| = n$;
3. W est définie par $W(x) := w(Ob(Odd(x)))$ pour tout entier $x > 0$;
4. On note e_w, le mot de longueur nulle ;
5. Si w est un mot tel que $w = w(k_1, ..., k_n)$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ alors φ est l'application définie par $\varphi(w) := 1 + 2^{k_1}(1 + 2^{k_2}(...(1 + 2^{k_n})...))$ à valeur dans $\mathbb{Q}^+$. On pose $\varphi(e_w) = 0$;
6. Si w est un mot à valeurs dans $\mathbb{Z}$ alors $\bar{\varphi}$ est l'application définie par $\bar{\varphi}(w) := 2^{\beta}(\varphi(w))$ telle que $\beta \in \mathbb{Z}$ et $\bar{\varphi}(w)$ impair ;
7. Si w est un mot à valeurs dans $\mathbb{Z}$ alors $\bar{w}$ est définie par $\bar{w} := W(\bar{\varphi}(w))$;
8. $\bullet$ sera l'opérateur de concaténation sur les mots ;
9. $\equiv$ la relation d'équivalence définie par $w_1 \equiv w_2 \Leftrightarrow \varphi(w_1) = \varphi(w_2)$;
10. Si $P \subseteq \mathbb{Z}$, on note $\Omega(P)$ l'ensemble des mots à valeurs dans P ;
11. Si $P \subseteq \mathbb{Z}$, on note $\Omega^*(P)$ l'ensemble $\Omega(P) \setminus \{e_w\}$;
12. Si $P \subseteq \mathbb{Z}$ on note $\widetilde{\Omega(P)}$ l'ensemble défini par :

$$\widetilde{\Omega(P)} = \{a \in \Omega(\mathbb{Z}) | \exists b \in \Omega(P), a \equiv b\}$$

Proposition 2.1. ***Dilution***
Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ et $d \in \Omega(\mathbb{Z})$ alors $w(\alpha, \beta, \gamma).d \equiv w(\alpha + \beta, -\beta, \beta + \gamma).d$.

Proposition 2.2. ***Ones in mass***
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$w(\alpha, 0).w(1)^n.w(\beta) \equiv w(\alpha + n + 1, \beta - 1)$$

Et pour tous mot v à valeurs dans $\mathbb{Z}$:

$$w(\alpha, 0).w(1)^n.w(\beta).v \equiv w(\alpha + n + 1, \beta - 1).v \quad (H_n)$$

Proposition 2.3. *Nous avons les propriétés suivantes :*

1. *Soit p un entier et soit $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq p}$ une suite dans $\mathbb{N}^*$ alors : $\overline{w(\alpha_1, ..., \alpha_p)} = w(\alpha_1, ..., \alpha_p)$. De plus pour tout mot v à valeurs dans $\mathbb{Z}$, $\bar{v} = \bar{\bar{v}}$.*

2. *Soient* p *et* q *deux entiers et soient* $(\alpha_i)_{1\leq i\leq p}$ *et* $(\beta_i)_{1\leq i\leq q}$ *deux suites à valeurs dans* $\mathbb{N}^*$ *telles que* $w(\alpha_1,...,\alpha_p) \equiv w(\beta_1,...,\beta_q)$ *alors* $p = q$ *et* $\alpha_i = \beta_i$ *pour tous* $1 \leq i \leq p$.
3. *Soit* v *un mot à valeurs dans* $\mathbb{N}^*$ *alors on a* $\overline{v} = v$.
4. *Soient* v_1, w_1, v_2 *et* w_2 *des mots à valeurs dans* $\mathbb{N}^*$ *tels que :* $v_1 \cdot w_1 \equiv v_2 \cdot w_2$ *et* $|v_1| = |v_2|$ *ou* $|w_1| = |w_2|$ *alors* $v_1 = v_2$ *et* $w_1 = w_2$.
5. *Soient* v_1, w *et* $w^{'}$ *des mots à valeurs dans* $\mathbb{Z}$. *Si* $w \equiv w^{'}$, *on a :*

$$v_1.w \equiv v_1.w^{'}$$

6. *Soient* v_1, v_2 *deux mots à valeurs dans* $\mathbb{Z}$. *On a :*

$$v_1 \equiv v_2 \implies \overline{v_1} = \overline{v_2}$$

7. *Pour tout* $x \in 2\mathbb{N}+1$, $x = \varphi((w \circ Ob)(x))$.
8. *Pour tout* $v \in \Omega(\mathbb{Z})$, $\overline{\varphi}(\overline{v}) = \overline{\varphi}(v)$.
9. *Pour tout mot* $v \in \Omega(\mathbb{Z})$, *si* $\varphi(v)$ *impair alors* $\varphi(v) = \overline{\varphi}(v) = \overline{\varphi}(\overline{v}) = \varphi(\overline{v})$.
10. *Soient* $\alpha \in \mathbb{N}^*$ *et* $v \in \Omega(\mathbb{N})$ *tel que* $v(1) > 0$ *alors* $\overline{w}(w(\alpha).v) = w(\alpha).\overline{v}$.
11. *Soit* $x \in 2\mathbb{N}+1$ *alors :*

$$\text{Si } Ob(x) = (k_1,...,k_r) \quad W(x) = w(k_1,...,k_r)$$

$$x = \varphi(W(x)) = \overline{\varphi}(W(x))$$

12. *Soient* $x, y \in \mathbb{N}^*$ *alors* $\sigma(\bar{\varphi}(W(x).W(y))) = \sigma(x) + \sigma(y)$.
13. *Soit* $x \in \mathbb{N}^*$, *alors* $W(\overline{f}(x)) = W(f(x))$.
14. *Soient* $k_1,...,k_r \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $k_1 > 2$ *alors :*

$$(W \circ f \circ \varphi)(w(k_1,...,k_r)) = \overline{w}(k_1 - 2, 1, k_2 - 1, 1, ..., k_r - 1, 1)$$

15. *Soit* $a \in \Omega(\mathbb{Z})$ *tel que pour tous* $j \in [\![1, |a|]\!]$, $\sum_{i=1}^{i=j} a(i) > 0$ *alors il existe* $b \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ *tel que* $a \equiv b$.

Proposition 2.4. ***Large dilution***
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, $c, d \in \Omega(\mathbb{Z})$, $r = |c| \geq 1$ *et soient* $c_1, \ldots, c_r \in$ *tels que* $c = \prod_{i=1}^{i=r} c_i$. *Alors pour tous* $n \in [\![1, r]\!]$ *:*

$$w(\alpha,\beta).c.d \equiv w(\alpha+\beta).(\prod_{i=1}^{i=n-1} w(c_i)).w(-\beta - \sum_{i=1}^{n-1} c_i, \beta + \sum_{i=1}^{i=n} c_i).(\prod_{i=n+1}^{i=r} w(c_i)).d$$

Note : lorsque la borne inférieure est strictement supérieur à la borne supérieure dans les accumulations ci-dessus, l'accumulation est réduite à son élément neutre.

Notation 2.2. $\boldsymbol{\varepsilon(v)}$ **- Word radix**
Soit $v \in \Omega(\mathbb{Z})$, posons $U_v = \{i | v(i) = 0\}$, on note ε l'application définie par :

$$\begin{array}{rcccc} \varepsilon & : & \Omega(\mathbb{N}) & \to & \{0,1\} \\ & & v & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } U_v \neq \emptyset \text{ et } \forall\ i > max(U_v)\ v(i) = 1\,; \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Proposition 2.5. ***Zero ending***
Soient $a, b \in \Omega(\mathbb{N}^*), r = |b| > 0$ tels qu'il existe $b_1, \ldots, b_r \in \mathbb{N}^*$. Alors on a :

1. $(\prod_{i=1}^{i=r} b_i).w(0) \equiv (\prod_{i=1}^{i=r-1} b_i).w(b_r + 1)$
2. $(\sigma \circ \varphi)(b.w(0)) = (\sigma \circ \varphi)(b) + 1$
3. *Soit $c \in \{e_w, w(0)\}$, on a $(\sigma \circ \varphi)(b.c) = (\sigma \circ \varphi)(b) + \varepsilon(b.c)$*
4. *Soit $v \in \{v \in \Omega(\mathbb{Z}) | \exists b \in \Omega(\mathbb{N}^*) \setminus \{e_w\}, \exists c \in \{e_w, w(0)\}, v = b.c\}$, on a : $(\sigma \circ \varphi)(a.v) = (\sigma \circ \varphi)(a) + (\sigma \circ \varphi)(v)$*

Proposition 2.6. ***Left product***
Soient $a \in \Omega(\mathbb{N})$ et $b \in \Omega(\mathbb{Z})$.

$$Si\ a(|a|) > 1 \quad et\ a(1) > 0 \quad alors \qquad a.b \equiv \overline{a}.b$$

Corollaire 2.1. ***Left product***
Soient $a \in \Omega(\mathbb{N})$ et $b \in \Omega(\mathbb{N}^*)$.

$$Si\ a(|a|) > 1 \quad et\ a(1) > 0 \quad alors \qquad \overline{a.b} = \overline{a}.b$$

Proposition 2.7. ***Congruence***
Soient $a \in \Omega(\mathbb{N})$, $b \in \Omega(\mathbb{Z})$ et $\lambda \in \mathbb{Z}$ tels que $a(1) > 0$. Alors on a :

$$a.w(\lambda).b \equiv \overline{a}.w(\lambda - \varepsilon(a)).b \quad (H_{|a|})$$

Proposition 2.8. ***Class representant radix***
Soient $a \in \Omega(\mathbb{N})$, $b \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ et $\lambda > 1$ tels que $a(1) > 0$. Alors on a :

$$\overline{w}(a.w(\lambda).b) = \overline{a}.w(\lambda - \varepsilon(a)).b \quad (H_{|a|})$$

Proposition 2.9. ***Bor class composition***
Soient $v_1, v_2 \in \Omega(\mathbb{N})$ tels que $v_1(1) > 0$, $v_2(1) > 0$ et $v_1(|v_1|) > 1$ alors :

1. $\overline{v_1.v_2} = \overline{v_1}.\overline{v_2}$
2. $\overline{\prod_{i=1}^{i=n} v_i} = \prod_{i=1}^{i=n} \overline{v_i}$ *si $v_n(1){>}0$ et $\forall i \leq n-1, v_i(|v_i|) > 1$ et $v_i(1) > 0$*

Lemme 2.2. ***Class representant radix for alternate one word***
Soient un entier $\lambda > 1$ *et* $a, v \in \Omega(\mathbb{N})$ *tels que*
$a = w(1, \alpha_1, 1, \alpha_2, 1, ...1, \alpha_r)$, $v = a.w(\lambda)$. *Alors il existe un unique mot* $v^{'}$ *et un unique entier* $\lambda^{'}$ *tels que :*

— $v \equiv v^{'}.w(\lambda^{'})$ *et* $v^{'} = \bar{v'}$
— $\sigma(\bar{\varphi}(v)) = r + \lambda + \sum_{i=1}^{i=r} \alpha_i$
— $\lambda^{'} = \lambda - \varepsilon(a)$

Lemme 2.3. ***Class representant norm for alternates ones word***
Soit un entier $r \geq 0$, v *un mot à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *tel que*
$v = (\prod_{i=1}^{i=r} w(1, \alpha_i)).w(1)$. *On a :*

$$\sigma(\bar{\varphi}(v)) = \varepsilon(v) + 1 + r + \sum_{i=1}^{i=r} \alpha_i$$

2.2 $W(3^t)$

Proposition 2.10. ***3-base Bor word form***
Nous avons les propriétés suivantes :

1. *Soient* r *et* x *tels que* $x \in A_r$ *et* $W(x) = w(k_1, ..., k_r)$. *On a alors :*

$$W(3x) = \bar{w}(w(1) \cdot \prod_{i=1}^{i=r} w(k_i - 1, 1))$$

2. *Soit* n *un entier* $(k1, ..., k_r)$ *tels que* $W(3^n) = w(k_1, ..., k_r)$ *alors :*

$$W(3^{n+1}) = \bar{w}(w(1) \cdot \prod_{i=1}^{i=r} w(k_i - 1, 1))$$

Notation 2.3. $\boldsymbol{\xi(t)}$
Posons $U_t = \{i | W(3^t)(i) = 1\}$, on note ξ l'application définie par :

$$\begin{array}{rcl} \xi \ : \ \mathbb{N} & \rightarrow & \{0,1\} \\ t & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } U_t \neq \emptyset \text{ et } \forall\ i > max(U_t)\ W(3^t)(i) = 2\,; \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Lemme 2.4. ξ-ε ***relationship***
oit la suite $(k_{t,i})_{1 \leq i \leq p_t}$ *telle que* $Ob(3^t) = (k_{t,1}, ..., k_{t,p_t})$. *Posons également* $v_t = w(1, k_{t,1} - 1, 1, k_{t,2} - 1, 1, ..., k_{t,p_t} - 1, 1)$. *On a :*

$$\xi(t) = \varepsilon(v_t)$$

Lemme 2.5. ***3-base Bor norm***
Pout tout entier $t \geq 0$, *on a :*

$$\sigma(3^{t+1}) = \sigma(3^t) + 1 + \xi(t)$$

2.3 Derivation in $\Omega(\mathbb{N}^*)$

Théorème 2.6. ***Collatz derivated word Theorem***
Soit $x \in A_r$ tel que $W(x) = w(x_1, ..., x_r)$ et soit $t \geq 0$ un entier tel que $t < min(\frac{x_1}{2}, \frac{ln(2).(x_2-1+\xi(t-1))}{ln(3)}, ..., \frac{ln(2).(x_r-1+\xi(t-1))}{ln(3)})$. Alors on a :

$$W(\bar{f}^t(x)) = w(x_1 - 2t) \cdot W(3^t) \cdot \prod_{i=2}^{i=r} (w(x_i - \sigma(3^t)) \cdot W(3^t))$$

Remarque 2.7. *Ce théorème n'est pas très pratique car les restrictions sur t sont trop fortes pour être utilisables dans un cas réel. La raison de sa présence est de mettre en avant le comportement de la dérivation qui a permis de faire émerger les propriétés de base sur les mots, en particulier sur $W(3^t)$. Une version généralisée est développée dans la partie suivante. Les principes de base de la démonstration seront similaires.*

3 Words of $\mathbb{Z}$ elements

3.1 K_p^t and B_r

Notation 3.1. $\boldsymbol{K_p^n(x)}$
Soit $r \geq 0$ et soit $x \in A_r$ tel que $Ob(x) = (k_1, ..., k_r)$. Soient $p, q \leq r$ et $t \in \mathbb{N}$. On définit l'application $K_{p,q}^t$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccc} K_{p,q}^t & : & A_r & \rightarrow & \Omega(\mathbb{Z}) \\ & & x & \mapsto & W(3^t).\prod_{i=p}^{i=q} (w(k_i - \sigma(3^t)).W(3^t)) \end{array}$$

On pose également $K_p^t(x) = K_{p,r}^t(x)$

Notation 3.2. $\boldsymbol{S_p(x)}$
Soit $r \geq 0$ et soit $x \in A_r$ tels que $Ob(x) = (k_1, ..., k_r)$. Soit $p \in [\![1, r]\!]$. On définit l'application S_p de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccc} S_p & : & A_r & \rightarrow & \Omega(\mathbb{N}^*) \\ & & x & \mapsto & \prod_{i=p}^{i=\lambda(x)} w(k_i) \end{array}$$

Remarquons que $S_p(1) = e_w$.

Définition 3.1. $\boldsymbol{B_r}$ **- Odd sets**
Posons $B_0 := \{e_w\}$ et pour tout $r > 0$,
$B_r := \{v \in \Omega(\mathbb{Z}) | \exists x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{Z}, v = w(x_1, ..., x_r)$ et $\forall j \in [\![1, r]\!] \sum_{i=1}^{i=j} x_i > 0\}$.

Remarque 3.1. *Pour tous $r_1, r_2 \geq 0$, $a \in B_{r_1}$ et $b \in B_{r_2}$, on a $a.b \in B_{r_1+r_2}$. Ceci tient au fait que a est un préfixe de $a.b$.*

Proposition 3.1. *B_r and $2\mathbb{N}+1$ relationship*
Nous avons : $\bigcup_{r\geq 0} A_r = \bigcup_{r\geq 0} \varphi(B_r) = 2\mathbb{N}+1$.

Proposition 3.2. $\boldsymbol{K_p^t} \in \widetilde{\boldsymbol{\Omega}(\mathbb{N}^*)}$
Soit x impair tel que $Ob(x) = (k_1, ..., k_r)$ et soient $t \geq 0$, $p, q \leq \lambda(x)$ alors si $l = |K_{p,q}^t(x)|$:

- $\sum_{i=1}^{i=l} K_{p,q}^t(x)(i) = \sigma(3^t) + \sum_{i=p}^{i=q} k_i$
- $K_{p,q}^t(x) \in B_l$
- $K_{p,q}^t(x) \in \widetilde{\Omega(\mathbb{N}^*)}$

3.2 F-stability of K_p^t

Définition 3.2. F operator
On note F l'application défini par :

$$\begin{array}{rccc} F & : & \Omega(\mathbb{Z}) & \rightarrow & \Omega(\mathbb{Z}) \\ & & v & \mapsto & \prod_{i=1}^{i=|v|} w(1, v(i) - 1) \end{array}$$

Remarquons tout de suite que si $|v| = 0$ alors $F(v) = e_w$ avec les conventions usuelles sur le produit.

Proposition 3.3. ***Basic F properties***

1. *Pour tous $a, b \in \Omega(\mathbb{Z})$, $F(a.b) = F(a).F(b)$.*
2. *Pour tous $t \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, $d \in \Omega(\mathbb{Z})$ on a :*
$$F(W(3^t).w(\alpha - \sigma(3^t))).d \equiv W(3^{t+1}).w(\alpha - \sigma(3^{t+1})).d$$
3. *Soient x impair, $r = \lambda(x)$, $p, q \leq r$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, $t \geq 0$ alors pour tous $d \in \Omega(\mathbb{Z})$:*
$$F(K_{p,q}^t(x).w(\alpha - \sigma(3^t))).d \equiv K_{p,q}^{t+1}(x).w(\alpha - \sigma(3^{t+1})).d$$
4. *Soient x impair, $r = \lambda(x)$, $p, q \leq r$ alors on a :*
$$F(K_{p,q}^t(x)).w(1) \equiv K_{p,q}^{t+1}(x)$$
5. *Soient $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{Z}$, $d \in \Omega(\mathbb{Z})$. Nous avons la propriété (P_n) suivante :*
$$\varphi(w(0).w(1)^n.w(\gamma).d) = 2^{n+1}\varphi(w(\gamma - 1).d)$$
6. *Soient $r \geq 0$, $v \in B_r$ alors $f(\varphi(v)) = \frac{1}{2}\varphi(w(0).F(v).w(1))$.*
7. *Soient $r \geq 0$, $v \in B_r$ alors $\overline{f}(\varphi(v)) = \overline{\varphi}(w(0).F(v).w(1))$.*

Théorème 3.2. ***Generalized compact derivation***
Soit $d \geq 2$ et soit $y \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe :

— $w(\alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1}) \in B_{d-1}$
— $\theta_1, \ldots, \theta_d \in 2\mathbb{N}+1$
— $(p_i)_{1 \leq i \leq d}$, $(q_i)_{1 \leq i \leq d}$ *deux suites à valeurs dans* $\mathbb{N}^*$ *telles que* $p_i, q_i \leq \lambda(\theta_i)$
— $(t_i)_{1 \leq i \leq d}$ *une suite à valeurs dans* $\mathbb{N}$
— $y = \varphi([\prod_{i=1}^{i=d-1} K_{p_i,q_i}^{t_i}(\theta_i).w(\alpha_i - \sigma(3^{t_i}))].K_{p_d,q_d}^{t_d}(\theta_d))$

Alors y *est impair et on a :*

$$f(y) = \frac{1}{2}\varphi(w(0).[\prod_{i=1}^{i=d-1} K_{p_i,q_i}^{t_i+1}(\theta_i).w(\alpha_i - \sigma(3^{t_i+1}))].K_{p_d,q_d}^{t_d+1}(\theta_d))$$

Corollaire 3.3. ***Generalized compact derivation***
Soit $d \geq 2$ *et soit* $y \in \mathbb{N}$ *tel qu'il existe :*
— $w(\alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1}) \in B_{d-1}$
— $\theta_2, \ldots, \theta_d \in 2\mathbb{N}+1$
— $(p_i)_{2 \leq i \leq d}$, $(q_i)_{2 \leq i \leq d}$ *deux suites à valeurs dans* $\mathbb{N}^*$ *telles que* $p_i, q_i \leq \lambda(\theta_i)$
— $(t_i)_{2 \leq i \leq d}$ *une suite à valeurs dans* $\mathbb{N}$
— $y = \varphi(w(\alpha_1).[\prod_{i=2}^{i=d-1} K_{p_i,q_i}^{t_i}(\theta_i).w(\alpha_i - \sigma(3^{t_i}))].K_{p_d,q_d}^{t_d}(\theta_d))$

Alors y *est impair et on a :*

$$f(y) = 2\varphi(w(\alpha_1 - 2).[\prod_{i=2}^{i=d-1} K_{p_i,q_i}^{t_i+1}(\theta_i).w(\alpha_i - \sigma(3^{t_i+1}))].K_{p_d,q_d}^{t_d+1}(\theta_d))$$

Corollaire 3.4. ***Compact derivation***
Soient x *impair,* $t \in \mathbb{N}$, $p, d \geq 1$ *tels qu'il existe* $w(\alpha_1, ..., \alpha_d) \in B_d$. *On a :*

$$f(\varphi((\prod_{i=1}^{i=d} w(\alpha_i)).K_p^t(x))) = 2\varphi(w(\alpha_1 - 2).(\prod_{i=2}^{i=d} w(1, \alpha_i - 1)).K_p^{t+1}(x))$$

3.3 σ-stability of K_p^t

3.3.1 σ-stability with a letter

Notation 3.3. Majorants M_n, pivot $\pi(\beta, v)$, Bornants Q_β, Limiteurs L_β, reste $\rho(\beta, v)$
- Soit $n \geq 0$, on pose $M_n = \{v \in \Omega^*(\mathbb{N}^*) | n \leq |v|, \exists i \in]\!]n, |v|]\!], v(i) > 1)\}$. On dit que les éléments de M_n majorent n ;
- Soient $\beta \geq 0$ et $v \in \Omega(\mathbb{N}^*)$, on pose $U(\beta, v) = \{j \in \mathbb{N}^* | j \leq |v|, \beta \leq \sum_{i=1}^{i=j} v(i)\}$;
- Soient $v \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$ et $\beta \leq (\sigma \circ \varphi)(v)$, on pose $\pi(\beta, v) = min(U(\beta, v))$ et on dit que $\pi(\beta, v)$ est le pivot de β dans v ;
- Soient $v \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$ et $\beta \leq (\sigma \circ \varphi)(v)$, on pose $\rho(\beta, v) = (\sum_{i=1}^{i=\pi(\beta,v)} v(i)) - \beta$ et on dit que $\rho(\beta, v)$ est le reste de v privé de β ;
- On pose $Q_\beta = \{v \in \Omega(\mathbb{N}^*) | (\beta < (\sigma \circ \varphi)(v)$ *et* $v \in M_{\pi(\beta,v)})$ *ou* $\beta + 1 < \sum_{i=1}^{i=\pi(\beta,v)} v(i)\}$. On peut de façon imagée dire que Q_β est l'ensemble des mots qui ne sont pas "écrasés" par β ;
- Soit $\beta \in \mathbb{N}$, on note L_β l'ensemble défini par :

$$L_\beta = \{v \in \Omega(\mathbb{N}^*) | \beta < (\sigma \circ \varphi)(v) - 1 \text{ et } v(|v|) > 1\}$$

Proposition 3.4. $L_\beta \subset Q_\beta$
Pour tous $\beta \geq 0$ *on a* $L_\beta \subset Q_\beta$ *et* $L_\beta = \{v \in Q_\beta | v(|v|) > 1\}$.

Lemme 3.5. ***Left product in*** $\mathbb{Z}$
Soient $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\beta \in \mathbb{N}$, $c \in M_0$, $d \in \Omega(\mathbb{Z})$ *tels que* $\beta \leq (\sigma \circ \varphi)(c)$.
Alors il existe $\alpha^{'} \in \mathbb{N}^*$, $\gamma_1 \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$, $\gamma_2 \in \Omega(\mathbb{N}^*) \cup \{w(0)\}$ *tels que :*

1. $w(\alpha).w(-\beta).c.d \equiv w(\alpha^{'} - \beta).\gamma_1.\gamma_2.d$
2. $\beta \leq (\sigma \circ \varphi)(\gamma_1)$ *et si* $\beta < (\sigma \circ \varphi)(c)$, $\beta < (\sigma \circ \varphi)(\gamma_1)$
3. $(\sigma \circ \varphi)(\gamma_1.\gamma_2) = (\sigma \circ \varphi)(c) + \alpha - \alpha^{'} + \mathbb{1}_{\{w(0)\}}(\gamma_2)$
4. *Si* $\beta = 0$ *:* $\gamma_2 \neq w(0)$
5. *Si* $\beta > 0$ *:*
   (a) $\alpha^{'} = \alpha$
   (b) *Si* $[(c \in Q_\beta$ *et* $\rho(\beta, c) \neq 0)$ *ou* $(\rho(\beta, c) > 1)$
   ou $(\rho(\beta, c) = 0$ *et* $(\sigma \circ \varphi)(c) > \beta + 1)]$ *alors* $\gamma_1 \in L_\beta$
   (c) *Si* $\rho(\beta, c) = 0$ *et si* $\beta < (\sigma \circ \varphi)(c)$ *alors* $\gamma_1(|\gamma_1|) > 1$
   (d) *Si* $(c \in Q_\beta$ *ou* $\rho(\beta, c) \neq 0)$ *alors* $\gamma_2 \neq w(0)$
   (e) *Si* $(c \in L_\beta$ *et* $\rho(\beta, c) \neq 0)$ *alors* $\gamma_2 = e_w$
   (f) *Si* $\gamma_2 \neq w(0)$ *alors* $(c \in Q_\beta$ *ou* $\rho(\beta, c) \neq 0)$
   (g) *Si* $(\sigma \circ \varphi)(c) = \beta$ *alors* $\gamma_1 = c$

Corollaire 3.6. ***Left product in*** $\mathbb{Z}$
Soient $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\beta \in \mathbb{N}$, $c \in L_\beta$, $d \in \Omega(\mathbb{Z})$. *Alors il existe* $\alpha^{'} \in \mathbb{N}^*$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ *tels que :*

1. $w(\alpha).w(-\beta).c.d \equiv w(\alpha^{'} - \beta).\gamma_1.\gamma_2.d$
2. $\beta < (\sigma \circ \varphi)(\gamma_1)$
3. $(\sigma \circ \varphi)(\gamma_1) + (\sigma \circ \varphi)(\gamma_2) = (\sigma \circ \varphi)(c) + \alpha - \alpha^{'}$
4. *Si* $\beta > 0$ *:* $\alpha = \alpha^{'}$
5. *Si* $\beta > 0$ *:* $\gamma_1(|\gamma_1|) > 1$

3.3.2 σ-stability with a word

Lemme 3.7. ***Full left product in*** $\mathbb{Z}$ ***with*** $\beta = 0$
Soient $a \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$, $c \in M_0$ *et* $d \in \Omega(\mathbb{Z})$. *Il existe alors* $\rho \in L_0$ *tel que :*

1. $a.w(0).c.d \equiv \rho.d$
2. $(\sigma \circ \varphi)(\rho) = (\sigma \circ \varphi)(a) + (\sigma \circ \varphi)(c)$

Lemme 3.8. ***Full left product in*** $\mathbb{Z}$ ***- termination***
Soient $\beta \in \mathbb{N}$, $a = \prod_{i=1}^{i=r} a_i \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$, $c \in \Omega(\mathbb{N}^*)$, $d \in \Omega(\mathbb{Z})$ *et* $i_0 = max(\{j \geq 1 | \beta \leq \sum_{i=j}^{i=r} a_i\})$ *tels que* $(\sigma \circ \varphi)(a) > \beta$. *Posons* $Z_0 = \{v \in \Omega(\mathbb{Z}) | \exists b \in \Omega(\mathbb{N}^*), v = b.w(0)\}$, $Z = \Omega(\mathbb{N}^*) \cup Z_0$ *et* $\beta_{i_0} = \beta - \sum_{i=i_0}^{i=r} a_i$.
S'il existe $\gamma \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ *et* $\gamma^{'} \in Z$ *tels que :*

A.1) $a.w(-\beta).c.d \equiv (\prod_{i=1}^{i=i_0-1} w(a_i)).w(-\beta_{i_0}).\gamma.\gamma^{'}.d$

A.2) $(\sigma \circ \varphi)(\gamma.\gamma^{'}) = (\sigma \circ \varphi)(c) + \varepsilon(\gamma^{'})$

A.3) $\beta_{i_0} = 0 \Rightarrow \gamma \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$

A.4) $\gamma^{'} \in Z_0 \Rightarrow \gamma \in M_0$

A.5) $c \in L_\beta \Rightarrow (\gamma^{'} \notin Z_0 \text{ et } \gamma \in L_{\beta_{i_0}})$

Alors il existe $\gamma_1 \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$, $\gamma_2 \in \{w(0), e_w\}$ *tels que :*

B.1) $a.w(-\beta).c.d \equiv \gamma_1.\gamma_2.d$

B.2) $(\sigma \circ \varphi)(\gamma_1.\gamma_2) = (\sigma \circ \varphi)(a) - \beta + (\sigma \circ \varphi)(c) + \mathbb{1}_{\{w(0)\}}(\gamma_2)$

B.3) $c \in L_\beta \Rightarrow \gamma_2 \neq w(0)$

Proposition 3.5. ***Full left product in*** $\mathbb{Z}$
Soient $\beta \in \mathbb{N}$, $a \in \Omega(\mathbb{N}^*)$, $c \in M_0$, $d \in \Omega(\mathbb{Z})$ *tels que* $(\sigma \circ \varphi)(a) > \beta$ *et* $(\sigma \circ \varphi)(c) > \beta$.
Alors il existe $\gamma_1 \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$, $\gamma_2 \in \{e_w, w(0)\}$ *tels que :*

1. $a.w(-\beta).c.d \equiv \gamma_1.\gamma_2.d$
2. $(\sigma \circ \varphi)(\gamma_1.\gamma_2) = (\sigma \circ \varphi)(a) - \beta + (\sigma \circ \varphi)(c) + \mathbb{1}_{\{w(0)\}}(\gamma_2)$
3. *Si* $c \in L_\beta$ *alors* $\gamma_2 \neq w(0)$.

Proposition 3.6. ***Extended full left product in*** $\mathbb{Z}$
Soient $\beta \in \mathbb{Z}$, $a \in \Omega(\mathbb{N}^*)$, $c \in M_0$, $d \in \Omega(\mathbb{Z})$ *tels que* $(\sigma \circ \varphi)(a) > -\beta$ *et* $(\sigma \circ \varphi)(c) \geq -\beta$.
Alors il existe $\gamma_1 \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$, $\gamma_2 \in \{e_w, w(0), w(0)^2\}$ *tels que :*

1. $a.w(\beta).c.d \equiv \gamma_1.\gamma_2.d$
2. $(\sigma \circ \varphi)(\gamma_1.\gamma_2) = (\sigma \circ \varphi)(a) + \beta + (\sigma \circ \varphi)(c) + \mathbb{1}_{\{w(0),w(0)^2\}}(\gamma_2)$
3. *Si* $\beta \geq 0$ *ou* $c \in L_{-\beta}$ *alors* $\gamma_2 = e_w$.
4. *Si* $(\sigma \circ \varphi)(c) > -\beta$ *alors* $\gamma_2 \neq w(0)^2$.

Corollaire 3.9. ***Full left product in*** $\mathbb{Z}$
Soient $\beta \in \mathbb{Z}$, $a, c \in \Omega(\mathbb{N}^*)$, $d \in \Omega(\mathbb{Z})$ *tels que* $-\beta < (\sigma \circ \varphi)(a)$. *Si* $\beta > 0$ *ou alors si* $c \in L_{-\beta}$ *on a :*

1. $a.w(\beta).c.d \equiv \overline{a.w(\beta).c}.d$
2. $(\sigma \circ \varphi)(a.w(\beta).c) = (\sigma \circ \varphi)(a) + \beta + (\sigma \circ \varphi)(c)$

3.3.3 σ-stability of K_p^t

Remarque 3.10. *Soit* $t \geq 0$, *on a* $W(3^t) \in \{w(1)^n | n \in \mathbb{N}\} \iff t \in \{0,1\}$.

Proposition 3.7. ***K_p^t stability***
Soient $x \in 2\mathbb{N}+1$ *et* $p \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $Ob(x) = (x_i)_{1 \leq i \leq \lambda(x)}$. *Soient* $t > 1$, $\beta \geq 0$, $a \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ *tels que* $(\sigma \circ \varphi)(a) > \beta$ *et* $\sigma(3^t) > \beta + 1$. *Alors il existe* $\gamma \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$, $\gamma^{'} \in \{e_w, w(0), w(0)^2\}$ *tels que :*

1. $a.w(-\beta).K_p^t(x) \equiv \gamma.\gamma^{'}$
2. $(\sigma \circ \varphi)(\gamma) = (\sigma \circ \varphi)(a) - \beta + \sigma(3^t) + \sum_{i=p}^{i=\lambda(x)} x_i$
3. *Si* $W(3^t)(|W(3^t)|) > 1$ *et* $\varphi(S_p(x)) \in E_0$ *alors* $\gamma^{'} = e_w$
4. *Si* $\gamma^{'} = w(0)^2$ *alors* $\varphi(S_p(x)) \notin E_0$

En particulier, il existe $\gamma \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$, $\gamma^{'} \in \{e_w, w(0), w(0)^2\}$ *tels que :*

1. $K_p^t(x) \equiv \gamma.\gamma^{'}$
2. $(\sigma \circ \varphi)(K_p^t(x)) = \sigma(3^t) + \sum_{i=p}^{i=\lambda(x)} x_i + \mathbb{1}_{\{w(0),w(0)^2\}}(\gamma^{'})$
3. *Si* $W(3^t)(|W(3^t)|) > 1$ *et* $\varphi(S_p(x)) \in E_0$ *alors* $\gamma^{'} = e_w$ *autrement dit :*
   (a) $K_p^t(x) = \overline{K_p^t(x)}$
   (b) $(\sigma \circ \varphi)(K_p^t(x)) = \sigma(3^t) + \sum_{i=p}^{i=\lambda(x)} x_i$

Remarque 3.11. *Pour retrouver un résultat similaire à la stabilité de* K_p^t *(P3.7) mais pour* $t = 0$, *on se tournera dans ce cas vers la propriété dite du full left product in* $\mathbb{Z}$ *(P3.5) puisque, pour* $t = 0$, $W(3^t) = e_w$ *et* $K_p^t(x) = S_p(x)$. *Quant au cas* $t = 1$, *il sera traité séparément plus loin.*

Corollaire 3.12. ***K_p^t stability***
Soient $x \in 2\mathbb{N}+1$ *et* $p \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $Ob(x) = (x_i)_{1 \leq i \leq \lambda(x)}$. *Soient* $t > 1$, $\beta \geq 0$, $a \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ *tels que* $(\sigma \circ \varphi)(a) > \beta$ *et* $\sigma(3^t) > \beta + 1$. *Posons* $r = \lambda(x)$. *Alors :*

1. <u>*Si* $W(3^t)(|W(3^t)|) > 1$ *et* $\varphi(S_p(x)) \in E_0$</u>
   (a) i. $K_p^t(x) \equiv \overline{K_p^t(x)}$
   ii. $(\sigma \circ \varphi)(K_p^t(x)) = \sigma(3^t) + \sum_{i=p}^{i=r} x_i$
   (b) i. $a.w(-\beta).K_p^t(x) \equiv \overline{a.w(-\beta).K_p^t(x)}$
   ii. $(\sigma \circ \varphi)(a.w(-\beta).K_p^t(x)) = (\sigma \circ \varphi)(a) - \beta + \sigma(3^t) + \sum_{i=p}^{i=r} x_i$
2. <u>*Si* $W(3^t)(|W(3^t)|) = 1$ *ou* $\varphi(S_p(x)) \notin E_0$</u>
   (a) *Il existe* $v \in \Omega(\mathbb{N}^*)$, $\delta \in \{0,1\}$ *tels que :*
   i. $K_p^t(x) \equiv v$
   ii. $(\sigma \circ \varphi)(v) = \sigma(3^t) + (\sum_{i=p}^{i=r} x_i) + \delta$
   (b) *Il existe* $v \in \Omega(\mathbb{N}^*)$, $\delta \in \{0,1\}$ *tels que :*
   i. $a.w(-\beta).K_p^t(x) \equiv v$

ii. $(\sigma \circ \varphi)(v) = (\sigma \circ \varphi)(a) - \beta + \sigma(3^t) + (\sum_{i=p}^{i=r} x_i) + \delta$

Proposition 3.8. ***Miscellaneous little properties***
Nous avons les propriétés suivantes :

1. *Soient* $n, \alpha \in \mathbb{Z}$, $b \in \Omega(\mathbb{Z})$. *Nous avons :*
$$\varphi(w(-n, \alpha).b) = 2^{-n}\varphi(w(n, \alpha - n).b)$$
2. *Soit* $t \geq 0$ *alors* $\sigma(3^{t+1}) > \sigma(3^t)$.
3. *Si* $n \in \mathbb{N}$: $n\frac{ln(3)}{ln(2)} \in \mathbb{N} \iff n = 0$.
4. *Soit* $t \geq 1$ *alors :*
$$\begin{array}{l} \xi(t-1) = 1 \iff W(3^t)(|W(3^t)|) > 1\,; \\ \xi(t-1) = 0 \iff W(3^t)(|W(3^t)|) = 1. \end{array}$$
5. *Soit* $a \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$ *alors* $(\sigma \circ \varphi)(w(0).a) < (\sigma \circ \varphi)(a)$.

Corollaire 3.13. $\boldsymbol{K_p^t}$ ***stability genralized***
Soient $x \in 2\mathbb{N}+1$ *et* $p \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $Ob(x) = (x_i)_{1 \leq i \leq \lambda(x)}$. *Soient* $t > 1$, $\beta \in \mathbb{Z}$, $a \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ *tels que* $(\sigma \circ \varphi)(a) > -\beta$ *et* $\sigma(3^t) > -\beta + 1$. *Posons* $r = \lambda(x)$. *Alors il existe* $v_1 \in \Omega^*(\mathbb{N}^*)$, $v_2 \in \Omega(\mathbb{N}^*)$ *et* $\delta_1, \delta_2 \in \{0, 1\}$ *tels que :*

1. *Si* $\varphi(S_p(x)) \in E_0$, $\delta_1, \delta_2 \in \{0, 1 - \xi(t-1)\}$
2. $K_p^t(x) \equiv v_1$
3. $(\sigma \circ \varphi)(v_1) = \delta_1 + \sigma(3^t) + \sum_{i=p}^{i=r} x_i$
4. $a.w(\beta).K_p^t(x) \equiv v_2$
5. $(\sigma \circ \varphi)(v_2) = \delta_2 + (\sigma \circ \varphi)(a) + \beta + \sigma(3^t) + \sum_{i=p}^{i=r} x_i$

Notation 3.4. $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, $\boldsymbol{I(p,x)}$
On note $\mathcal{A}$ la partie de $\Omega(\mathbb{N}^*)$ définie par :
$\mathcal{A} = \{v \in \Omega(\mathbb{N}^*) | \exists a \in \Omega(\mathbb{N}^*), \exists n \in \mathbb{N} \text{ et } v = a.w(1).w(2)^n\}$.
On note I l'application définie par :
$$\begin{array}{rclcl} I & : & \mathbb{N}^* \times (2\mathbb{N}+1) & \to & \{0,1\} \\ & & (p, x) & \mapsto & \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(S_p(x)) \end{array}$$

Proposition 3.9. $\boldsymbol{K_p^t}$ ***stability for*** $\boldsymbol{t = 1}$
Soient $t = 1$, $p \in \mathbb{N}^*$, $x \in 2\mathbb{N}+1$ *on a :*
$(\sigma \circ \varphi)(K_p^t(x)) = \sigma(3^t) + \sum_{i=p}^{i=\lambda(x)} (Ob(x)(i)) + I(p, x)$

4 H_0 and H_1

4.1 E_0

Proposition 4.1. H_0 ***est vraie.***
Soit $x \in E_0$, *alors* $\sigma(\bar{f}(x)) < \sigma(x)$ *et* H_0 *est vraie.*

4.2 E_1 and $k_1 = 1$

Lemme 4.1. ***Derivation in*** E_n**,** $n > 0$
Soient $n > 0$, $x \in E_n$, $r = \lambda(x) \geq 3$ *tels que* $Ob(x) = (k_1, \dots, k_r)$ *et tels que :*

1. $\exists i_0 \in [\![2, r]\!]$, $\forall i \in [\![2, i_0]\!]$ $k_i = 2$
2. $k_1 = 1$ *et* $k_{i_0+1} > 2$

Soit $t \in [\![1, i_0 + 1]\!]$, *on a :*

$$\bar{f}^t(x) = \bar{\varphi}(w(2(i_0 - (t-1))).W(3^{t-1}).w(k_{i_0+1} - 2 - \sigma(3^{t-1})).K^t_{i_0+2}(x))$$

Lemme 4.2. ***Boundary in*** E_1
Soient $r \geq 3$, $x \in E_1$ *tels que* $Ob(x) = (k_1, \dots, k_r)$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ *et* $W(x) \notin \{v \in \Omega(\mathbb{N}^*) | \exists n \in \mathbb{N}, v = w(1).w(2)^n\}$. *Alors on a :*

$$\exists t \leq 4, \ \sigma(\bar{f}^t(x)) < \sigma(x)$$

Proposition 4.2. H_1 ***avec*** $k_1 = 1$
Soient $x \in E_1$, $r \geq 1$ *et* $Ob(x) = (k_i)_{1 \leq i \leq r}$ *tel que* $k_1 = 1$ *alors*

$$x \text{ vérifie } H_1 \text{ et il existe } t \leq 4 \text{ tel que } \sigma(\bar{f}^t(x)) < \sigma(x).$$

4.3 E_1 and $k_1 > 1$ (ONGOING)

Proposition 4.3. H_1 ***avec*** $x_\alpha = 1$**,** $1 < \alpha \leq r$**,** $x_1 = 3$ ***TODO***
Soient $x \in E_1$, $r > 1$, $Ob(x) = (x_i)_{1 \leq i \leq r}$ *et soit* $1 < \alpha \leq r$ *tel que* $x_\alpha = 1$ *et* $x_1 = 3$, *alors* x *vérifie* H_1.

Proposition 4.4. H_1 ***avec*** $x_\alpha = 1$**,** $1 < \alpha \leq r$ ***avec*** $x_1 \neq 3$
Soient $x \in E_1$, $r > 1$, $Ob(x) = (x_i)_{1 \leq i \leq r}$ *et soit* $1 < \alpha \leq r$ *tel que* $x_\alpha = 1$ *et* $x_1 \neq 3$, *alors* x *vérifie* H_1.

Proposition 4.5. *La propriété* H_1 *est vraie.*